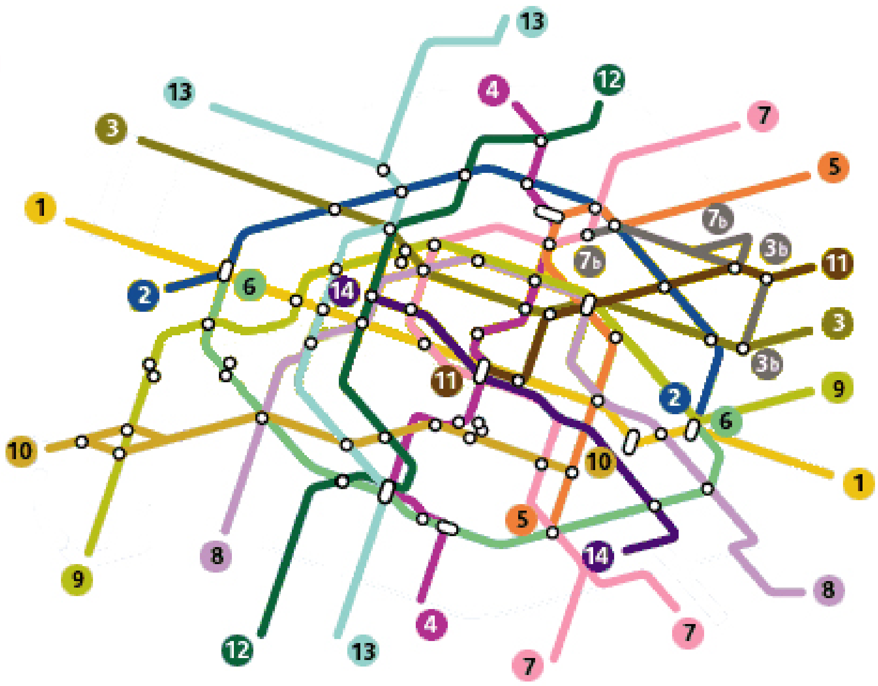
Introduction à la théorie des graphes

Solutions des exercices

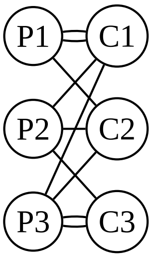
Didier Müller

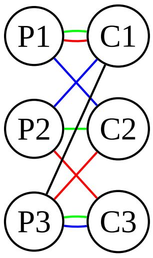


 COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE

1 Graphes non orientés

Exercice 1
On obtient le graphe biparti suivant (à gauche) :

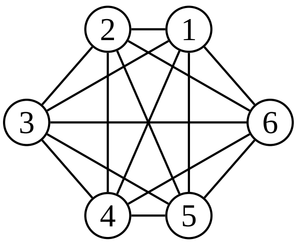




En colorant les arêtes de ce graphe (1 couleur = 1 heure de l'horaire), en prenant garde que chaque sommet n'ait pas deux arêtes incidentes de même couleur, on obtient le résultat de droite. De ce graphe coloré, on tire l'horaire suivant :

	P1	P2	P3
1ère heure (rouge)	C1	C3	C2
2ème heure (vert)	C1	C2	C3
3ème heure (bleu)	C2	C1	C3
4ème heure (noir)			C1

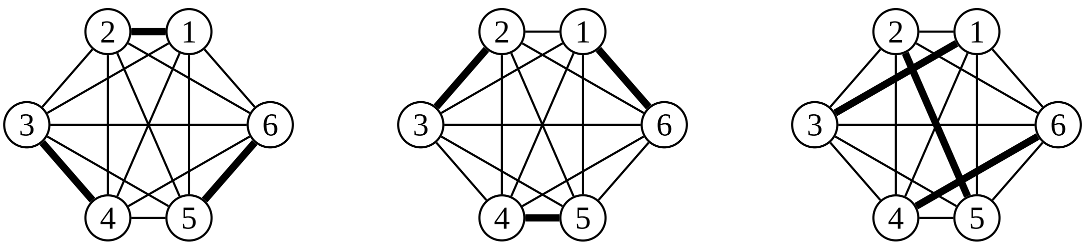
Exercice 2
On obtient le graphe complet K_6.

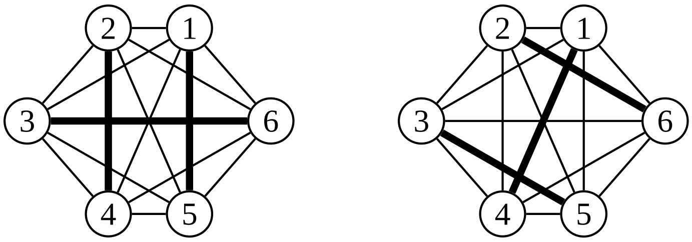


Il faudra 5 jours de tournoi. Voici un calendrier possible :

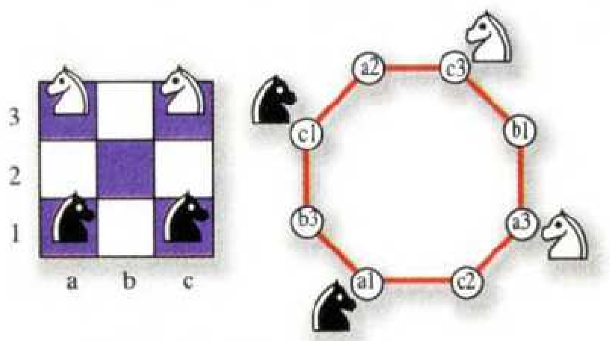
Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
1-2	2-3	1-3	2-4	1-4
3-4	4-5	4-6	1-5	2-6
5-6	1-6	2-5	3-6	3-5

Ce calendrier a été construit d'après les cinq schémas ci-dessous :





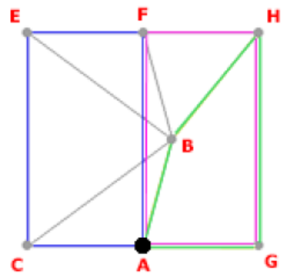
Exercice 3
On utilise le graphe qui indique les cases atteignables depuis une case courante.



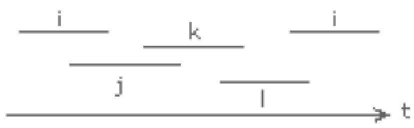
Les mouvements sont donc (par exemple) : c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3, c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3

Exercice 4
Comme Holmes, dessinons un graphe avec les sommets A, B, C, E, F, G et H. Dans ce graphe, on relie deux sommets i et j si les suspectes i et j se sont rencontrées au château.

Pour découvrir laquelle des 7 femmes est venue plus d'une fois au château, il faut rechercher dans le graphe des cycles reliant quatre sommets, sans diagonale. En effet, un tel carré ijkl sans diagonale indique que l'une des quatre suspectes est nécessairement venue plus d'une fois au château.

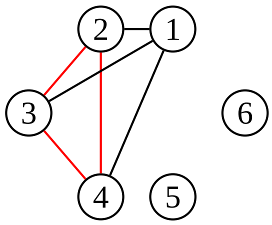


Pour s'en convaincre, on peut faire le petit schéma temporel ci-dessous :

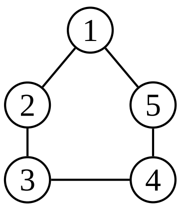


On voit que i a dû venir deux fois au château pour qu'un cycle sans diagonale apparaisse dans le graphe.
Le seul sommet commun à ces trois cycles est le sommet A. C'est donc Ann la coupable.

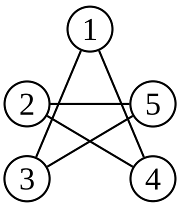
Exercice 5
Construisons un graphe dont les sommets représentent les six personnes ; deux sommets sont reliés par une arête noire lorsque les personnes se connaissent et rouge dans le cas contraire. Il s'agit de prouver que ce graphe contient une clique K_3 dont les arêtes sont de même couleur.
Si l'on ne tient pas compte de la couleur des arêtes, on obtient le graphe complet K_6. De chaque sommet partent cinq arêtes, et au moins trois d'entre elles sont de même couleur (noire ou rouge). Considérons la clique K_4 composée des sommets 1, 2, 3 et 4. Supposons, par exemple, que les arêtes (1, 2), (1, 3) et (1, 4) soient grises.



Considérons alors la clique K_3 composée des sommets 2, 3, 4. Si toutes ces arêtes sont rouges, c'est terminé : on a trois personnes qui ne se connaissent pas.
Si une de ces arêtes est grise, c'est aussi terminé : on a trois personnes qui se connaissent.
Par contre, dans un K_5, on peut trouver deux graphes partiels complémentaires sans K_3. On le voit sur les deux graphes partiels ci-dessous, dont la "superposition" donne le graphe complet K_5 :



"Se connaissent"



"Ne se connaissent pas"

Exercice 6
Soit $G = (V,E)$ un graphe simple. Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête (x,y) de E est comptée deux fois, une première fois pour $d(x)$ et une seconde fois pour $d(y)$. Donc, cette somme est finalement égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Remarque
Le lemme des poignées de mains reste valable pour les multigraphes avec boucles en convenant qu'une boucle contribue pour 2 dans le calcul du degré d'un sommet.

Exercice 7
Notons P l'ensemble des sommets de degré pair et I l'ensemble des sommets de degré impair d'un graphe simple $G = (V,E)$. P et I forment une partition de V. D'après le **lemme des poignées de mains**, on a :

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot|E| = \sum_{v\in P} d(v) + \sum_{v\in I} d(v)$$

Or $2 \cdot |E|$ et $\sum_{v \in P} d(v)$ sont des entiers pairs. $\sum_{v \in I} d(v)$ est également pair, puisque c'est la différence de deux entiers pairs. Or, chaque terme de la somme $\sum_{v \in I} d(v)$ est impair. Elle ne peut donc être paire que si le nombre de termes est pair. On a ainsi montré que le cardinal de I est un entier pair.

Exercice 8

Si tout le monde a au moins un ami dans l'assemblée, cela signifie que tous les degrés des sommets sont compris entre 1 et $n-1$. Comme il y a n sommets, par le principe des tiroirs, il est certain qu'au moins deux ont le même degré, donc que deux personnes ont le même nombre d'amis.

Si une personne n'a aucun ami, le degré du sommet correspondant est 0. Les degrés des $n-1$ autres sommets sont compris entre 1 et $n-2$. Même conclusion que dans le premier cas.

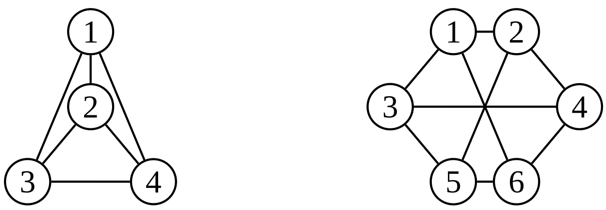
Si plusieurs personnes n'ont pas d'amis, alors elles ont le même nombre d'amis, en l'occurrence 0 !

Exercice 9

Considérons le graphe simple dont les sommets représentent les 15 ordinateurs ; les arêtes représentent les liaisons entre ces ordinateurs. Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair. D'après le résultat établi dans l'exercice 7, un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau est donc impossible.

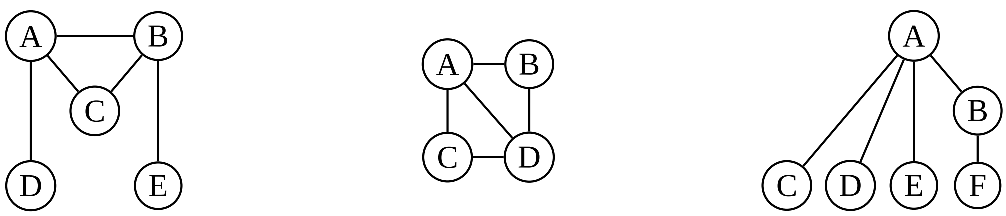
Exercice 10

La figure ci-dessous montre deux graphes 3-réguliers (on dit aussi cubiques), ayant respectivement 4 et 6 sommets. En effet, on constate aisément qu'il n'existe pas de graphes cubiques ayant un nombre impair de sommets : le nombre d'arêtes d'un graphe cubique à n sommets est $\frac{3n}{2}$, qui n'est entier que lorsque n est pair.

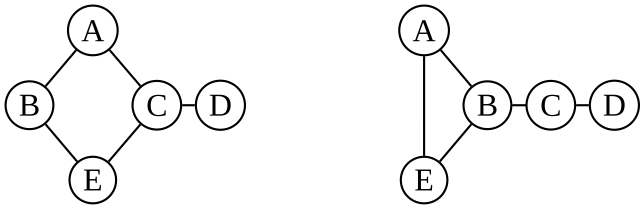


Exercice 11

Les suites (3, 3, 2, 1, 1), (3, 3, 2, 2) et (4, 2, 1, 1, 1, 1) sont graphiques, comme le montrent les graphes ci-dessous :



Les graphes distincts ci-dessous correspondent tous deux à la suite (3, 2, 2, 2, 1) :



Exercice 12
Un problème survient avec les multigraphes, car plusieurs arêtes peuvent relier deux mêmes sommets.

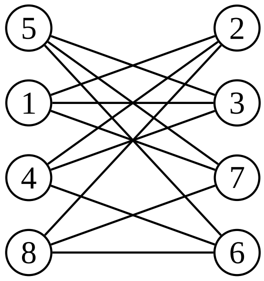
Exercice 13
Les graphes complets.

Exercice 14
Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appellera coloriage d'un graphe G à k couleurs toute application ϕ de V dans $\{1, ..., k\}$. On dira qu'un coloriage ϕ est propre si deux sommets voisins n'ont pas la même couleur.

Soit G un graphe biparti et ϕ un coloriage à 2 couleurs de G. Si $(x_0, \ldots, x_n)$ est une chaîne, on a pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\phi(x_i) \neq \phi(x_{i+1})$, d'où $\phi(x_{2k}) = \phi(x_0)$ et $\phi(x_{2k+1}) = \phi(x_1)$. Maintenant, si cette chaîne est un cycle, on a $x_0 = x_n$, d'où $\phi(x_0) = \phi(x_n)$, ce qui implique que n est pair. G ne possède donc pas de cycle de longueur impaire.

Soit maintenant $G = (V, E)$ un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire. On doit construire un coloriage propre de G. Comme les composantes connexes ne communiquent pas entre elles, on peut se ramener au cas où G est connexe : il suffira ensuite de recoller les applications.
Soit x_0 un sommet quelconque de V. Pour $x \in V$, on note $l(x)$ la longueur minimale d'un chemin reliant x_0 à x. On pose alors $\phi(x) = 1$ si $l(x)$ est pair, $\phi(x) = 2$ sinon. Soit $\{x, y\} \in E$: il est facile de voir que $|l(x) - l(y)| \leq 1$. Si on avait $l(x) = l(y)$, on pourrait construire un cycle de longueur $2l(x) + 1$ contenant le point x_0 et l'arête $\{x, y\}$. Ceci est contraire à l'hypothèse selon laquelle le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire. On a donc $|l(x) - l(y)| = 1$, donc $l(x)$ et $l(y)$ ne sont pas de même parité, ce qui implique $\phi(x) \neq \phi(y)$. Le coloriage est donc bien propre.

Exercice 15
Tous les cycles sont pairs. On peut le dessiner ainsi :



Exercice 16

Soit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Construisons la suite de graphes $G_i = (V, E_i)$ avec $E_0 := \emptyset$ et $E_i := E_{i-1} \cup \{e_i\}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Le théorème est vrai pour G_0 car $m = 0$, $p = n$ et $\nu(G_0) = 0 - n + n = 0$.

Supposons le théorème vrai pour G_i et étudions G_{i+1}. Deux cas peuvent se présenter :

a. L'arête $e_{i+1} = \{a, b\}$ a ses extrémités dans deux composantes connexes distinctes de G_i, alors G_{i+1} aura $m_{i+1} = m_i + 1$ arêtes, n sommets et $p_{i+1} = p_i - 1$ composantes connexes donc : $\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1} = (m_i + 1) - n + (p_i - 1) = m_i - n + p_i = \nu(G_i) \geq 0$

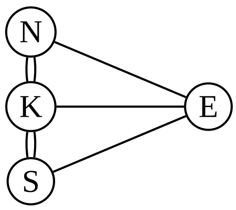
b. L'arête $e_{i+1} = \{a, b\}$ a ses extrémités dans la même composante connexe de G_i, alors G_{i+1} aura $m_{i+1} = m_i + 1$ arêtes, n sommets et $p_{i+1} = p_i$ composantes connexes donc : $\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1} = (m_i + 1) - n + p_i = m_i - n + p_i + 1 \geq \nu(G_i) \geq 0$

Ainsi, dans les deux cas, on a $\nu(G_{i+1}) \geq \nu(G_i)$.

On constate dans cette construction, que dès que $\nu(G_i)$ devient plus grand que 0, on a un cycle dans G.

Exercice 17

Non. Le graphe correspondant n'est ni eulérien, ni semi-eulérien :



Les sommets représentent les quatre régions de la ville (Nord, Kneiphof, Est, Sud) et les arêtes les ponts reliant deux régions adjacentes .

Exercice 18

Un graphe est eulérien s'il est connexe et si tous ses sommets sont de degré pair. Il est semi-eulérien si tous ses sommets sauf deux sont de degré pair ; les chaînes eulériennes du graphe auront alors ces deux sommets pour extrémités.

Exercice 19

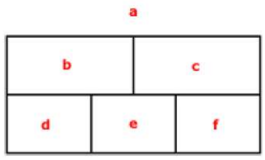
Le graphe de gauche n'est évidemment pas eulérien puisque non connexe. Celui du milieu est eulérien car tous les sommets sont de degré pair. Celui de droite est semi-eulérien, car seuls deux sommets sont de degré impair.

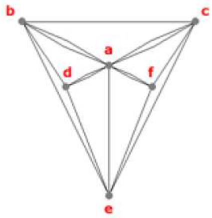
Exercice 20

Oui. Comme le nombre de sommets de degré impair est toujours pair, il suffit de relier le nouveau sommet à tous les sommets de degré impair. Tous les sommets seront alors de degré pair, et le graphe sera donc eulérien.

Exercice 21

Non, car le graphe correspondant n'est pas eulérien. Pour construire ce graphe, on a représenté les régions délimitées par des cloisons par les sommets ; les sommets x et y sont reliés si les régions x et y sont séparées par une cloison. Chaque cloison correspond donc à une arête du graphe.

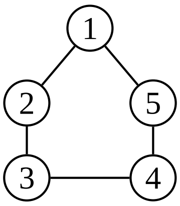




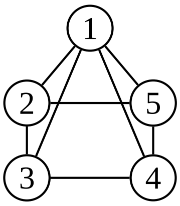
Exercice 22
Réponses aux quatre questions :

1) Les dominos sont au nombre de 4 + 3 + 2 + 1 = 10 : 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5.
2) Considérons maintenant le graphe complet K_5 à 5 sommets numérotés de 1 à 5. Ce graphe possède 10 arêtes, chaque arête correspondant à une paire de sommets distincts, c'est-à-dire à un domino. Former une boucle fermée avec ces dominos revient donc à trouver un cycle eulérien (passant par toutes les arêtes, donc utilisant tous les dominos) dans K_5. Une solution possible est la suivante : 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1, 1-3, 3-5, 5-2, 2-4, 4-1.
3) Les dominos doubles peuvent être insérés sans difficulté dans cette suite. En terme de graphes, les dominos doubles correspondent à une boucle sur un sommet et cette boucle peut être parcourue lorsqu'on atteint le sommet en question.
4) Si l'on considère le même problème avec des faces numérotées de 1 à n, on doit raisonner sur le graphe complet à n sommets. Or, nous savons qu'un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et ne possède que des sommets de degré pair. Dans le cas des graphes complets, cela n'est vrai que si le nombre de sommets est impair.

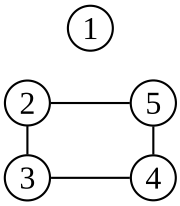
Exercice 23
Par exemple :



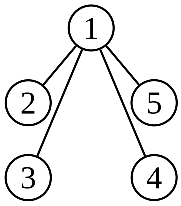
Hamiltonien et eulérien



Hamiltonien et non eulérien



Non hamiltonien et eulérien



Non hamiltonien et non eulérien

Exercice 24
Réponses aux quatre questions :

1) Désignons par les chiffres de 1 à 9 les 9 personnes et considérons le graphe complet K_9 à 9 sommets. Une composition de la table correspond à un cycle hamiltonien de K_9 (un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet). Si deux compositions de table correspondent à deux cycles ayant une arête commune, cela signifie que les deux personnes reliées par cette arête se retrouvent côte à côte. Ainsi, le problème revient à déterminer le nombre de cycles hamiltoniens disjoints de K_9. Le graphe K_9 possédant $9 \cdot 8 \div 2 = 36$ arêtes et chaque cycle utilisant 9 arêtes, ce nombre est au maximum égal à 4.

2) Il vaut effectivement 4, comme le prouvent les 4 cycles hamiltoniens disjoints suivants : 1,2,3,9,4,8,5,7,6 - 1,3,4,2,5,9,6,8,7 - 1,4,5,3,6,2,7,9,8 - 1,5,6,4,7,3,8,2,9

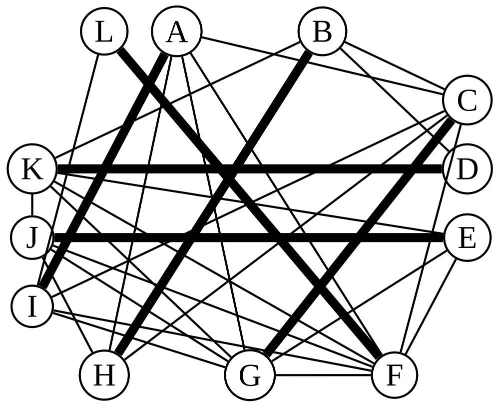
3) Avec trois tables de 3, chaque ensemble doit correspondre à trois triangles.

4) (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9) - (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) - (1,5,9)(2,6,7)(3,4,8) - (1,6,8)(2,4,9)(3,5,7)

Exercice 25
Il s'agit de trouver des cycles hamiltoniens dans le **complémentaire** du graphe, c'est-à-dire dans le graphe précisant les compatibiltés entre les personnes.
En voici un : B, C, H, A, F, G, E, D.

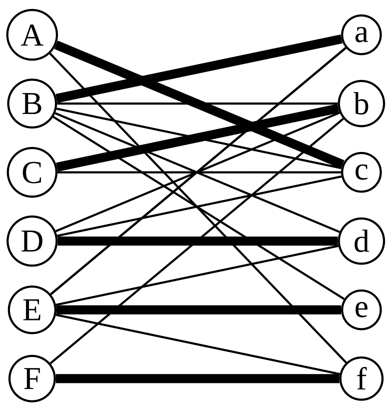
Le graphe complémentaire d'un graphe simple G est un graphe simple H ayant les mêmes sommets et tel que deux sommets de H soient adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G.

Exercice 26
On cherche un couplage optimal dans le graphe ci-dessous (qui représente les binômes possibles) :



On peut donc former 6 binômes.

Exercice 27
On cherche un couplage optimal dans le graphe biparti ci-dessous (qui représente les couples possibles) :



On voit facilement qu'il existe un couplage parfait. On peut donc former six couples.

Exercice 28
Étant donnée une carte connexe C, supposons qu'elle n'ait qu'un sommet P. Alors S=1 et A=0, il n'y a qu'une région, donc R=1. Ainsi $S-A+R=2$. D'autre part, C peut être construite à partir d'un seul sommet à l'aide des constructions suivantes :

(1) Ajouter un nouveau sommet Q_2 et le relier à un sommet existant Q_1, par une arête qui n'en croise aucune autre.

(2) Relier deux sommets existants Q_1 et Q_2 par une arête a qui n'en croise aucune autre.

L'opération (1) ne change pas la valeur de $S-A+R$, puisque S et A sont augmentés de 1 et que R n'est pas modifié. L'opération (2) ne change pas non plus la valeur de $S-A+R$, car S est inchangé alors que A et R sont augmentés de 1. En conclusion, la carte C doit avoir la même valeur $S-A+R$ que la carte qui n'a qu'un seul sommet, à savoir 2, et la formule est démontrée.

Exercice 29
On remarque que $K_{3,3}$ a 6 sommets et 9 arêtes. Supposons que $K_{3,3}$ soit planaire. D'après la formule d'Euler, la représentation planaire a 5 régions (6-9+5=2). Il n'y a pas de cycle de longueur 3 dans le graphe, donc le degré de chaque région doit être supérieur ou égal à 4, et la somme des degrés des régions doit être supérieure ou égale à 20. Comme la somme des degrés des régions d'une carte connexe est égale à deux fois le nombre d'arêtes (théorème 1.7), le graphe doit avoir au moins 10 arêtes. Or, $K_{3,3}$ a 9 arêtes. Ce graphe n'est donc pas planaire.

Exercice 30
M^2 indique le nombre de chaînes de longueur 2 entre les sommets i et j. M^3 indique le nombre de chaînes de longueur 3 entre les sommets i et j.

Exercice 31
Matrice et listes d'adjacences :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

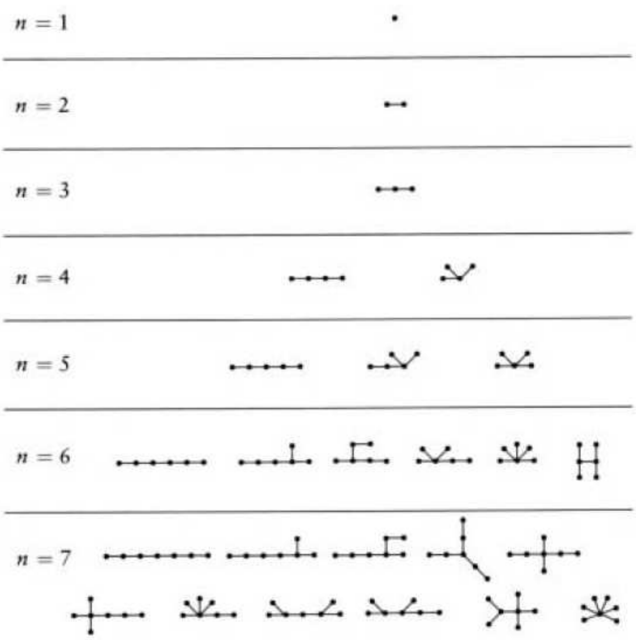
1 : 2, 4, 6
2 : 1, 4, 5, 6, 7
3 : 4
4 : 1, 2, 3, 5, 6
5 : 2, 4
6 : 1, 2, 4
7 : 2

Exercice 32
Ce théorème se démontre en utilisant systématiquement le théorème 1.3.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) par définition
(2) $\Leftrightarrow$ (3)
$\nu(G)=0$ et $p=1 \Rightarrow m=\nu(G)+n-p=n-1$. Réciproquement $m=n-1$ et $\nu(G)=0$ entraîne $p=n-(n-1)=1$, donc G est connexe.
(3) $\Leftrightarrow$ (4)
$\nu(G)=0$ et $m=n-1 \Rightarrow$ p = $\nu(G)-m+n=0-(n-1)+n=1$. Réciproquement, $p=1$ et $m=n-1$ entraîne $\nu(G)=0$, donc G est sans cycle.
(4) $\Rightarrow$ (5)
$m=n-1$ et $p=1 \Rightarrow \nu(G)=0 \Rightarrow G$ est sans cycle (et donc sans boucle).

G connexe $\Rightarrow$ chaque paire $\{u, v\}$ de sommets distincts est reliée par une chaîne simple.
G est sans cycles $\Rightarrow$ chaque paire $\{u, v\}$ est reliée par une seule chaîne simple.
(5) $\Rightarrow$ (2)
Si chaque paire $\{u, v\}$ de sommets distincts de G est reliée par une seule chaîne simple, le graphe est en tout cas connexe et ne peut contenir de cycles simples, puisque chaque cycle simple peut être vu comme étant la concaténation de deux chaînes aux arêtes disjointes et aux extrémités communes. Donc G est un arbre.

Exercice 33
Le théorème est vrai pour $n = 2$ sommets, car les deux sommets sont des feuilles.
Supposons qu'il soit vrai pour $n-1$ sommets $(n > 2)$. Si on veut ajouter un sommet, on peut le relier à l'arbre existant avec une arête (sinon on forme un cycle) soit à une feuille, soit à un sommet qui n'est pas une feuille. Dans le premier cas, le nombre de feuilles reste le même (une disparaît et une apparaît) ; dans le second cas, le nombre de feuilles augmente de 1.
Le théorème est donc vrai pour n sommets, puisque l'on ne peut pas faire diminuer le nombre de feuilles par l'ajout d'un sommet.

Exercice 34
La figure ci-dessous montre tous les arbres possibles qui ont entre 1 et 7 sommets. On voit qu'il y a 3 arbres différents à 5 sommets, 6 à 6 sommets et 11 à 7 sommets.



Exercice 35
Si un arbre a un couplage parfait, toutes les feuilles sont saturées (forcément). Colorons en noir les arêtes du couplage. On peut construire un couplage parfait dans un arbre ainsi :

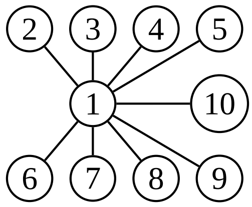
1. On colore toutes les arêtes touchant une feuille en noir. Si plus d'une arête noire touche un même sommet, alors il n'y a pas de couplage parfait : STOP
2. On enlève les sommets saturés et les arêtes adjacentes.
3. Tant qu'il y a des sommets, allez en 1.

Ce procédé ne peut donner qu'un seul couplage parfait, s'il y en a un.

Etant donné un graphe G, notons $imp(G)$ le nombre de composantes connexes d'ordre impair de G. Pour qu'un arbre ait un couplage parfait, il faut $imp(G-v)$=1 pour tout sommet v.

Exercice 36
$S = \{2,3,3,5,5,7,7,9\}$

Exercice 37
On obtient une étoile :



Exercice 38
Un codage de Prüfer est une liste ordonnée de $n-2$ nombres compris entre 1 et n, avec répétitions possibles des nombres. Il y a n nombres possibles pour la première place dans la liste, n pour la 2ème, n pour la 3ème, etc. En tout, il y a donc n^{n-2} listes possibles, donc n^{n-2} arbres différents à n sommets numérotés.

Exercice 39
Il y a 8 arbres couvrants.

Exercice 40
Il y a 5 arbres maximaux possibles.

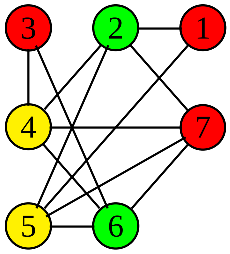
Exercice 41
G contient plusieurs cliques d'ordre 3, donc $\gamma(G) \geq 3$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables : $S_1 = \{v_1, v_4\}, S_2 = \{v_2, v_6, v_7\}, S_3 = \{v_3, v_5\}$. Donc $\gamma(G) \leq 3$, car à chaque stable correspondra une couleur.
On en déduit que $\gamma(G) = 3$.

Exercice 42
Réponses aux trois questions :

1. Il faudra 3 couleurs.
2. Oui, le graphe est semi-eulérien.
3. Oui, le graphe est semi-hamiltonien.

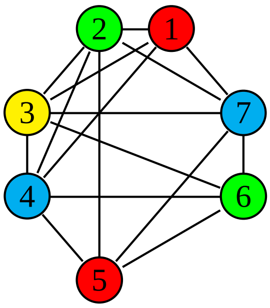
Exercice 43
On construit d'abord le graphe des rencontres : les sommets représentent les élèves ; une arête (i, j) signale que les élèves i et j se sont rencontrés.
Il reste alors à proposer une coloration du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs. Chaque couleur correspondra à une place assise. La coloration montre que la bibliothèque dispose d'au moins quatre places assises, car le graphe contient une clique à quatre sommets (B-E-F-G). Ces quatre places assises sont suffisantes.

Exercice 44
Construisons le graphe G dont les sommets sont les agences numérotées de 1 à 7, une arête reliant deux sommets lorsque les deux agences correspondantes proposent au moins un lieu identique.
On arrive à trouver une 3-coloration des sommets (voir ci-dessous). Chaque couleur correspondra à un jour de la semaine.



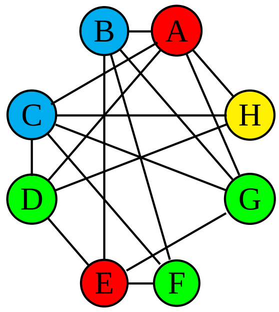
1er jour (rouge) : excursions des agences 1, 3 et 7.
2ème jour (vert) : excursions des agences 2 et 6.
3ème jour (jaune) : excursions des agences 4 et 5.

Exercice 45
Construisons le graphe G dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête reliant deux sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs.



Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une k-coloration de G avec $k = \gamma(G)$:
G possède une clique d'ordre 4 (de sommets 1, 2, 3, 4), donc $\gamma(G) \geq 4$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables :
$S_1 = \{1,5\}, S_2 = \{2,6\}, S_3 = \{3\}, S_4 = \{4,7\}$, d'où $\gamma(G) \leq 4$.
On en déduit que $\gamma(G) = 4$.
Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :
1ère période (rouge) : épreuves des cours 1 et 5.
2ème période (vert) : épreuves des cours 2 et 6.
3ème période (jaune) : épreuve du cours 3.
4ème période (cyan) : épreuves des cours 4 et 7.

Exercice 46
Construisons le graphe X dont les sommets sont les huit produits chimiques tel que deux de ses sommets sont reliés lorsque les produits associés à ces sommets ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon. Le nombre minimum de wagons est égal au nombre chromatique de ce graphe.
X contient une clique d'ordre 4 (de sommets A, C, D, H), donc $\gamma(X) \geq 4$.
Déterminons une partition des sommets de X en sous-ensembles stables : $S_1 = \{A,E\}, S_2 = \{B,C\}, S_3 = \{D,F,G\}, S_4 = \{H\}$. Donc $\gamma(X) \leq 4$.



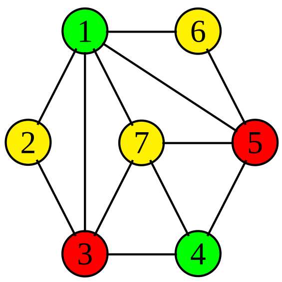
On en déduit que $\gamma(X) = 4$. Il faudra donc 4 wagons.

Exercice 47
Réponses aux trois questions :

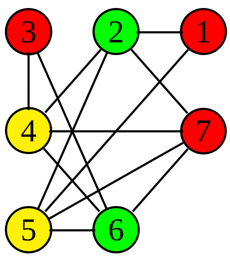
1. Il suffit de considérer un cycle ayant un nombre impair de sommets.
2. Si l'on rajoute à ce graphe un sommet relié à tous les sommets du cycle, on obtient un graphe de nombre chromatique 4 ne contenant pas de K_4.
3. On peut itérer cette construction de façon à obtenir, pour tout n, un graphe de nombre chromatique n ne contenant pas de K_n.

Exercice 48
Résoudre un Sudoku classique revient à colorer un graphe à 81 sommets (un sommet correspondant à une case) avec 9 couleurs, certains sommets étant colorés au départ. Ce graphe a 810 arêtes, chaque case (sommet) étant reliée aux 8 autres de sa colonne, aux 8 autres de sa ligne et aux 8 autres de sa région (4 sont déjà comptées), ce qui fait bien (81·(8+8+4))/2 = 810 arêtes.

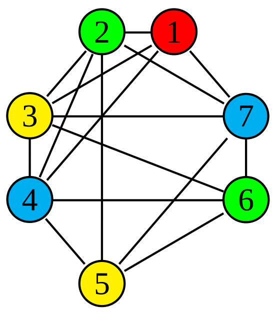
Exercice 49
Les colorations des trois graphes :



ex. 41



ex. 44

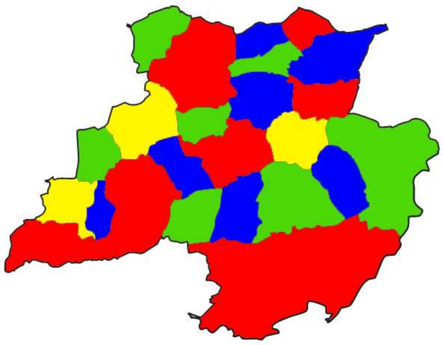


ex. 45

Exercice 50
Il faudra 3 couleurs au minimum. L'algorithme de Welsh et Powell donne la coloration en 3 couleurs ci-après.

Exercice 51

Il y a beaucoup de colorations possibles... avec 4 couleurs au minimum.



Exercice 52

Il s'agit de colorer avec le minimum de couleurs les graphes complets à 3, 4, 5 et 6 sommets. Les sommets représenteront les joueurs, les arêtes les matches et les couleurs les heures des matches.

On peut colorer les arêtes de K_3 et K_4 avec trois couleurs. Il faudra donc au minimum trois heures.

On peut colorer les arêtes de K_5 et K_6 avec cinq couleurs. Il faudra donc au minimum cinq heures.

Exercice 53

On peut faire "disparaître" entièrement le graphe en éliminant successivement les sommets simpliciaux $v_1, v_7, v_8, v_6, v_2, v_3, v_4, v_5$. Le graphe est donc triangulé.

Exercice 54

Tous ces types de graphes possèdent un schéma d'élimination parfait. Ils sont donc triangulés.

Exercice 55

En reprenant le schéma d'élimination parfait de l'ex. 53, on colorie les sommets en lisant la liste de droite à gauche et on met à chaque fois la couleur la plus petite possible, ce qui donne : $v_5 \to 1,\ v_4 \to 2,\ v_3 \to 3,\ v_2 \to 4,\ v_6 \to 2,\ v_8 \to 1,\ v_7 \to 3,\ v_1 \to 1.$

2 Graphes orientés

Exercice 56
Elémentaire... Ne pas oublier les boucles sur les sommets.

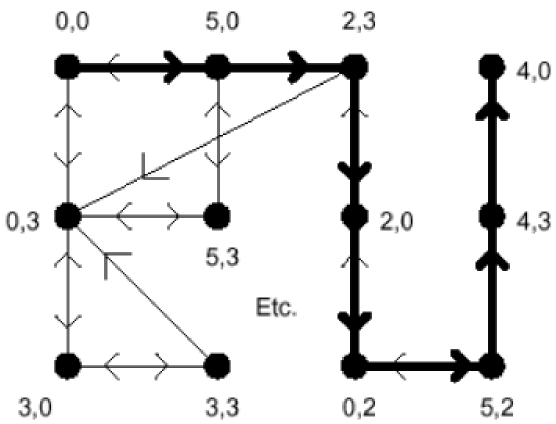
Exercice 57
Degrés des sommets :
$d^+(1) = 3, d^-(1) = 0, d(1) = 3$
$d^+(2) = 2, d^-(2) = 2, d(2) = 4$
$d^+(3) = 1, d^-(3) = 0, d(3) = 1$
$d^+(4) = 1, d^-(4) = 3, d(4) = 4$
$d^+(5) = 0, d^-(5) = 2, d(5) = 2$
$d^+(6) = 1, d^-(6) = 1, d(6) = 2$

Exercice 58
Conditions nécessaires :

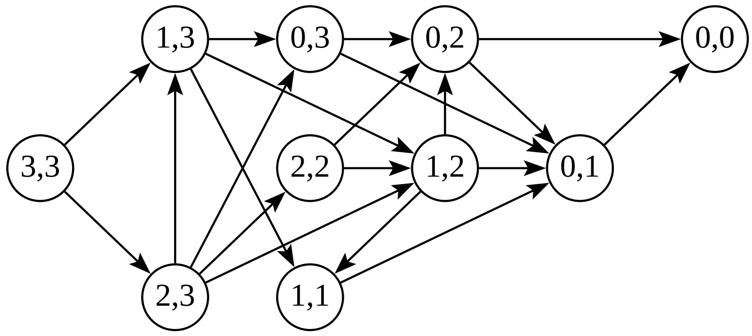
- Chaque sommet doit avoir un degré intérieur (entrant) égal à 2 (chaque lapin a deux parents) à l'exception de deux sommets pour lesquels le degré intérieur est nul (ces sommets correspondent aux Adam et Ève de notre groupe de lapins).
- Le graphe doit être sans circuit (on dit également acyclique). En effet, un lapin ne peut avoir pour parent l'un de ses descendants...
- On doit pouvoir colorer les sommets de ce graphe en deux couleurs (mâle et femelle), de façon telle que tout sommet de degré intérieur égal à 2 possède un prédécesseur mâle et un prédécesseur femelle.

Il est possible que d'autres conditions soient nécessaires mais mes connaissances sur la reproduction chez les lapins ne me permettent pas d'aller plus loin... (nombre de portées possibles, nombre de petits lapins par portée, etc.)

Exercice 59
Les étiquettes des sommets sont des couples donnant respectivement le contenu du récipient de 5 litres et celui du récipient de 3 litres. On place un arc entre deux sommets lorsqu'on peut passer d'une configuration à l'autre. On cherche alors un chemin du sommet 0, 0 au sommet 4, 0...
La figure ci-après montre un tel chemin (le digraphe n'est pas représenté en entier).
Il y a d'autres solutions que celle présentée ci-dessous.



Exercice 60
Le jeu avec deux tas de trois allumettes est décrit par le graphe ci-dessous. On ne distingue pas les deux tas (par exemple 2,1 = 1,2).



Le joueur qui atteint la configuration 0,0 perd la partie. Pour gagner, on doit donc absolument atteindre la configuration 0,1. On peut vérifier qu'en jouant 1,3 au premier coup, on peut toujours ensuite atteindre 0,1 en deux étapes : 1,3 - 0,3 - 0,1 ou 1,3 - 1,2 - 0,1 ou enfin 1,3 - 1,1 - 0,1. Le coup gagnant au départ est donc « enlever 2 allumettes dans un tas ».

Exercice 61
Réponses aux questions 1 et 3 :
1. Il n'y a que deux tournois et tous les deux ont un chemin hamiltonien.
3. Preuve par induction.

Exercice 62
Soit x un sommet d'un tournoi T. Si x n'est pas un roi, alors un sommet y n'est pas atteignable à partir de x par un chemin de longueur au plus 2. Donc, aucun successeur de x n'est un prédécesseur de y. Cela signifie que chaque successeur de x doit être un successeur de y et que x est un successeur de y. Donc $d^+(y) > d^+(x)$. Si y n'est pas un roi, on peut répéter l'argument pour trouver un sommet z ayant un degré extérieur plus grand. Comme T est fini, ce processus devra se terminer une fois et nous aurons forcément trouvé un roi.

Exercice 63
Soit x et y deux sommets d'un digraphe connexe $G = (V,E)$. L'algorithme de Moore calcule la distance $d(x;y)$. On étiquette les sommets de G en observant les règles suivantes :

1. le sommet x reçoit l'étiquette 0
2. on choisit un arc $(u,v) \in E$, où u est déjà étiqueté k :
    i. si v n'est pas étiqueté, alors v reçoit l'étiquette $k+1$
    ii. si v est étiqueté p, alors l'étiquette de v est remplacée par $min(p;k+1)$

    puis on biffe cet arc.

L'algorithme s'arrête lorsque tous les arcs ont été biffés. L'étiquette de chaque sommet donne sa distance par rapport au somet x.
L'algorithme de Moore permet aussi d'exhiber de façon récursive les chemins de longueur k de x à y : on part de y et on détermine les sommets z tels que $(z,y) \in E$ avec $d(x;z) = k-1$ et ainsi de suite jusqu'à x.

Exercice 64
Algorithme de marquage

1. On marque un sommet s quelconque avec le symbole "$\pm$".
2. On marque avec le symbole "+" tous les sommets que l'on peut atteindre depuis s en suivant les arcs dans le sens des flèches.
3. Si certains sommets ne sont pas marqués par "+" alors STOP, car le graphe n'est pas fortement connexe.
4. On marque avec le symbole "-" tous les sommets que l'on peut atteindre depuis s en suivant les arcs dans le sens inverse des flèches.
5. Si tous les sommets sont marqués "$\pm$", alors le graphe est fortement connexe.

Le premier digraphe est fortement connexe, car tous les sommets ont pu être marqués "$\pm$". Par contre, le deuxième digraphe n'est pas fortement connexe. Pour trouver les composantes fortement connexes, on suit la procédure suivante :

a. Appliquer l'algorithme de marquage énoncé ci-dessus.
b. Supprimer les sommets marqués d'un "$\pm$" : ils forment une composante fortement connexe.
c. Tant qu'il reste des sommets, aller en a.

Composantes fortement connexes du deuxième digraphe : {1, 2, 5, 6}, {9, 10, 13, 14}, et {3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16}.

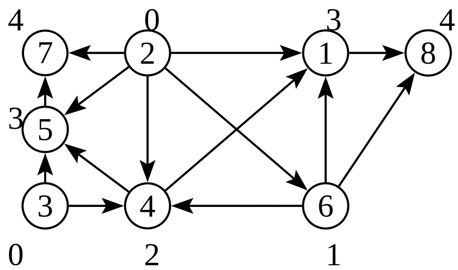
Exercice 65
M^2 indique le nombre de chemins de longueur 2 entre les sommets i et j. M^3 indique le nombre de chemins de longueur 3 entre les sommets i et j.

Exercice 66

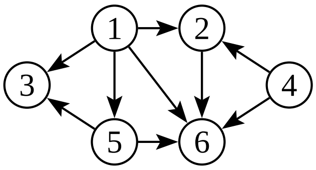
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 : 6
2 : 1, 4, 5, 6, 7
3 : 4
4 : 1, 5
5 : -
6 : 4
7 : -

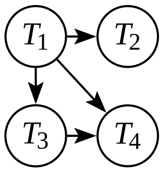
Exercice 67
On obtient les rangs ci-dessous :



Exercice 68
Le premier graphe admet une orientation transitive :



Exercice 69
Réponses aux deux questions :
1. On obtient un graphe de comparabilité :



2. Le nombre minimum de véhicules est le nombre minimum de chemins passant par tous les sommets du graphe.

Exercice 70
Corrigé abrégé :
1. Oui. Preuve par induction.
2. M_1 est préféré à toutes les autres marques. Il est impossible que deux marques aient été préférées au même nombre d'autres marques.
3. Si le graphe contient un circuit, il n'existe pas toujours une marque préférée à toutes les autres (on peut facilement trouver un contre-exemple dans un K_4). Par contre, on peut prouver par induction que le deuxième cas est toujours vrai.

Exercice 71
Corrigé en partant du sommet 3 :

Initialisation
$S = \{3\}; T = \{1,2,4,5\}; \lambda = (\infty,3,0,2,\infty); p = (NIL,3,NIL,3,NIL)$

1ère itération
$i = 4$ car $\lambda(4) = min(\infty,3,2,\infty) = 2$;
$S = \{3,4\}; T = \{1,2,5\}$;
les successeurs de 4 dans T sont 1 et 2 ;
$\lambda(1)$ prend la nouvelle valeur $min(\infty;\lambda(4)+\delta(4;1)) = min(\infty;2+10) = 12$; $p(1) = 4$;
$\lambda(2)$ garde sa valeur car $min(3;\lambda(4)+\delta(4;2)) = min(3;2+3) = 3$; $p(2) = 3$;
d'où les nouveaux vecteurs $\lambda = (12,3,0,2,\infty)$ et $p = (4,3,NIL,3,NIL)$

2e itération
$i = 2$ car $\lambda(2) = min(12,3,\infty) = 3$;
$S = \{2,3,4\}$; $T = \{1,5\}$;
2 n'a pas de successeur dans T ;
d'où les vecteurs $\lambda = (12,3,0,2,\infty)$ et $p = (4,3,NIL,3,NIL)$

3e itération
$i = 1$ car $\lambda(1) = min(12,\infty) = 12$;

$S = \{1,2,3,4\}$; $T = \{5\}$;
le seul successeur de 1 dans T est 5 ;
$\lambda(5) = min(\infty; \lambda(1) + \delta(1;5)) = min(\infty; 12+4) = 16$; p(5) = 1
d'où les vecteurs $\lambda = (12,3,0,2,16)$ et $p = (4,3,NIL,3,1)$

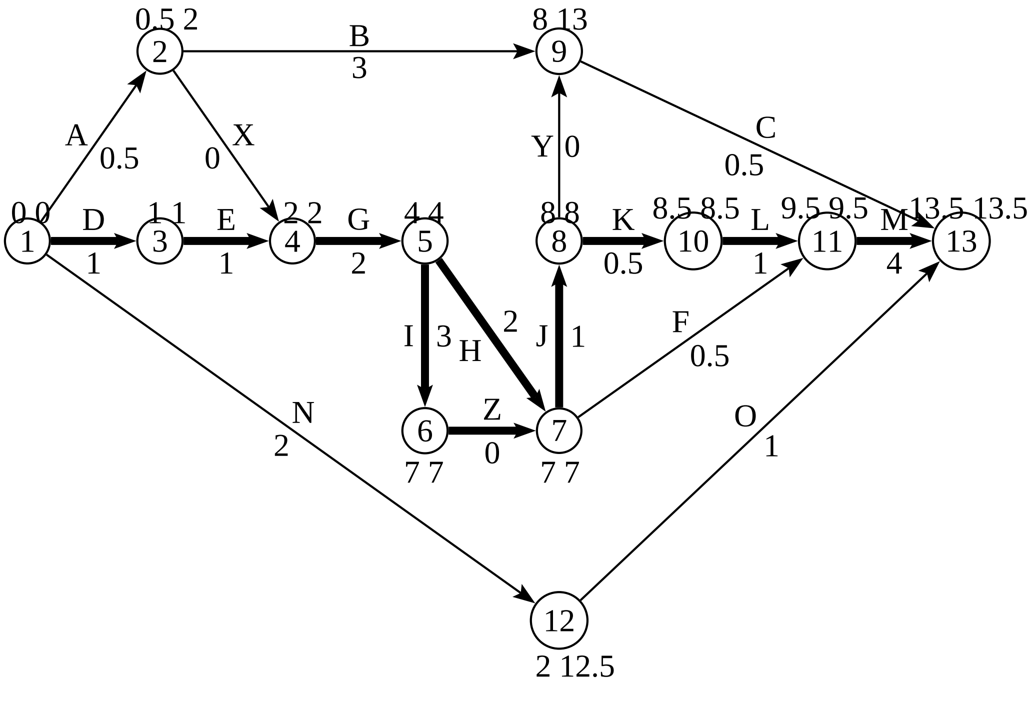
4e itération
$i = 5$; $\lambda(5) = 16$;
$S = \{1,2,3,4,5\}$; $T = \{\}$; FIN.
$\lambda = (12,3,0,2,16)$

Exercice 72
Avec des arcs de poids négatif, on risque d'avoir des circuits de longueur négative. Dans un pareil cas, il n'y a pas de plus court chemin, car plus on parcourt le circuit, plus le chemin est court !

Exercice 73
Vérifiez que vous avez obtenu le même graphe que dans l'exemple.

Exercice 74
Le chemin critique est A-E-H-J. La durée minimale des travaux est de 17 jours.

Exercice 75
On a dû introduire les tâches fictives X, Y et Z de durée nulle, pour respecter les précédences.
1.



2. La durée minimale des travaux est de 13.5 jours. Le chemin critique est constitué des tâches D, E, G, I, J, K, L et M. La tâche H est aussi une tâche critique.