

La logique pour les nuls

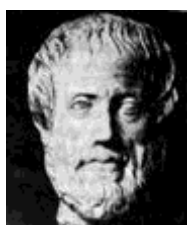
Avertissement

Ces pages -initialement conçues par un étudiant de philosophie et régulièrement modifiées par les lecteurs- se présentent sous la forme d'une brève histoire de la logique à laquelle sont intégrées ses différentes branches ainsi que certains des problèmes étudiés à l'heure actuelle. Elles ont pour objectif de permettre au lecteur novice en matière de logique de se faire rapidement une idée sur le sujet.

Chapitre I. Antiquité, Moyen Âge et Temps Modernes

A. Aristote

1. Introduction



Aristote

L'étude systématique de la logique commence avec Aristote, philosophe grec du IV^e siècle A.C. Les écrits d'Aristote relatifs à la logique furent édités sous le nom d'*Organon* (instrument) par Andronicus de Rhodes vers 60 A.C. Leur mise en forme traditionnelle a été réalisée par Boèce au Ve siècle P.C. Le choix du terme *organon* traduit bien l'idée du philosophe qu'était Aristote. Pour lui, la logique était l'instrument du savoir, non le savoir lui-même. Elle devait permettre de distinguer les raisonnements corrects des raisonnements incorrects. Son intérêt pour les sciences conduisit Aristote à l'étude des propositions dites *catégoriques*.

Toute proposition catégorique (par exemple la proposition *Certains chimpanzés sont des femelles*) résulte de la combinaison de termes selon la structure (*Quantificateur*) *Sujet*-(*Copule*)-*Prédicat*. Le quantificateur exprime la **quantité** de la proposition : s'agit-il de tous les chimpanzés ou seulement de certains d'entre eux ? Le **sujet** est ce à quoi l'on attribue le prédicat. La copule exprime la **qualité** de la proposition (affirmative ou négative : *est* ou *n'est pas*). Le **prédicat**, enfin, est ce qui est attribué au sujet. Le seul type d'énoncé étudié par Aristote est l'énoncé *déclaratif*, celui qui décrit un état de fait et qui est, par conséquent, susceptible de *vrai* ou de *faux*, par opposition aux énoncés interrogatifs (les questions) ou impératifs (les ordres) dont on ne saurait dire ni qu'ils sont vrais ni qu'ils sont faux.

Cette structure *S-P* des propositions catégoriques peut donc varier en **qualité** (*affirmative* ou *négative*) et en **quantité** (*universelle* ou *particulière*). A propos de la quantité, Aristote adopte le point de vue **extensionnel** qui sera en grande partie celui de la logique contemporaine. Chaque terme possède une extension (l'ensemble des objets qu'il désigne) et une compréhension (les caractères qu'on énonce quant on définit le terme). Ainsi *homme* a pour extension la classe des objets auquel le terme *homme* peut être appliqué : *Pierre, Paul, Jacques...* et comme compréhension la classe de ses caractères : *être vivant, bipède, omnivore...* Pour Aristote, les propositions universelles considèrent toute l'extension du sujet, les particulières seulement une partie. En combinant les paramètres de qualité et de quantité, il existe quatre types de proposition catégorique.

- A** L'universelle affirmative : *Tout homme est mortel*
- E** L'universelle négative : *Aucun homme n'est mortel*
- I** La particulière affirmative : *Quelque homme est mortel*
- O** La particulière négative : *Quelque homme n'est pas mortel*

Les quatre premières voyelles de l'alphabet latin **A, E, I, O** qui désignent habituellement ces propositions proviendraient des mots latin *AffIrmo* et *nEgO* (*j'affirme, je nie*).

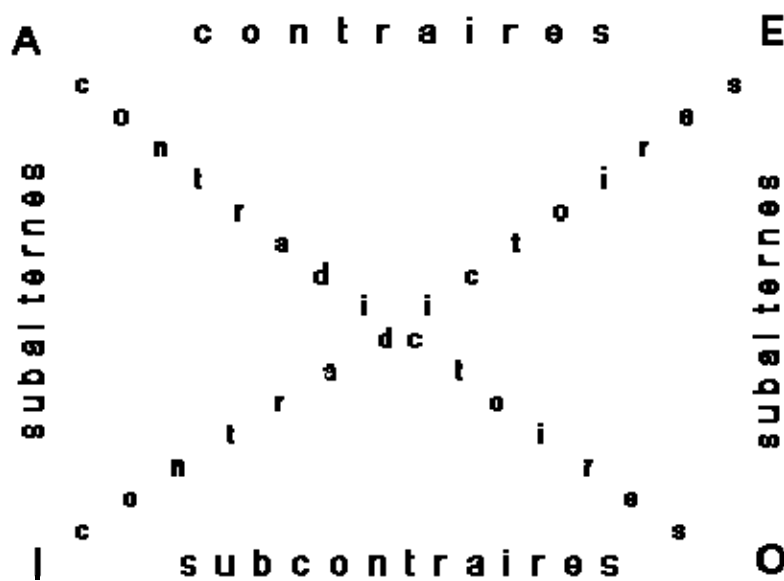
Tous les énoncés du langage ordinaire ne présentent pas spontanément la structure *S-P*. Il faut donc les transformer pour les rendre conformes à cette structure logique. Parmi les procédés utilisés, le plus simple est celui de la transformation du verbe intransitif en copule+participe présent : *Tous les Grecs mangent* devient *Tous les Grecs sont mangeant* ou *Tout Grec est mangeant*. Cette analyse logique fait ainsi violence au langage naturel. Il faudra attendre la fin XIXe siècle et le développement de la philosophie du langage et de la linguistique au XXe siècle pour voir émerger des logiques qui épousent davantage le fonctionnement du langage ordinaire.

2. Théorie de l'inférence immédiate

La théorie de l'inférence immédiate est une analyse des **relations** nécessaires entre propositions. Pour Aristote, raisonner c'est inférer. **L'action d'inférer consiste à tirer d'une ou de plusieurs propositions données et connues comme vraies ou comme fausses (qu'on appelle prémisses) une ou plusieurs propositions nouvelles jugées vraies ou fausses en fonction de la relation logique que l'on a établie entre elles et les prémisses.** Les inférences immédiates partent d'une seule proposition, jugée vraie ou fausse; les inférences plus complexes, dites médiates (comme le **sylogisme**), partent de deux propositions au moins (deux exactement dans le cas du syllogisme).

L'inférence immédiate est un raisonnement composé de deux propositions : une prémisses et une conclusion, unies par un lien de conséquence logique. Celles qui intéressent Aristote sont les inférences immédiates **valides**, c'est-à-dire celles qui, partant d'une prémisses supposée vraie, conduisent nécessairement à une conclusion vraie. Aristote, le premier, établit une distinction entre la *validité formelle* d'un raisonnement et la *vérité factuelle* des propositions qui le constituent. Un raisonnement peut être valide même si certaines propositions qui la composent sont fausses. *Tout homme est un automate* donc *Quelque homme est un automate* est, pour Aristote, une inférence valide.

Une série d'inférences immédiates sont rassemblées sous la forme traditionnelle du **carré logique**. Ce carré donne un nom aux relations inférentielles qui existent entre des propositions **A, E, I** et **O**.



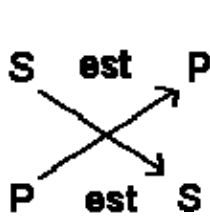
- La relation de **contradiction** oppose deux propositions de quantité et de qualité différentes. Les contradictoires prennent toujours une **valeur de vérité opposée**.
- La relation de **contrariété** oppose deux propositions de même quantité (universelle) mais de qualité différente. Les contraires ne peuvent être **vraies** en même temps.
- La relation de **subcontrariété** oppose également deux propositions de même quantité (particulière) mais de qualité différente. Les subcontraires ne peuvent être **fausses** en même temps.
- La relation de **subalternation** oppose deux propositions de même qualité mais de quantité différente. La vérité de la subalterne **inférieure suit** de la vérité de la supérieure.

Le résultat de ces inférences immédiates peut être présenté dans un tableau symétrique. A gauche on a l'hypothèse de départ, à droite ce qu'il est possible d'en inférer.

			A	E	I	O
1	A	V	V	F	V	F
2	E	V	F	V	F	V
3	I	V	?	F	V	?
4	O	V	F	?	?	V
5	A	F	F	?	?	V
6	E	F	?	F	V	?
7	I	F	F	V	F	V
8	O	F	V	F	V	F

La première ligne du tableau se lit : Si **A** est vraie, **E** est fausse, **I** est vraie et **O** est fausse. S'il est vrai que tout homme est mortel, alors il est faux qu'aucun homme n'est mortel; il est vrai que quelque homme est mortel (ce qui est vrai de tous est vrai de l'un d'entre eux) et il est faux que quelque homme n'est pas mortel (puisqu'ils le sont tous, sans exception).

2.1. La relation de conversion



D'autres relations que celles exprimées par le carré logique ont également été abordées. La plus importante d'entre elles est sans doute la relation de *conversion* qui permet de **passer d'une proposition à une autre dans laquelle sujet et prédicat ont été permutés** tout en conservant à la proposition la même valeur de vérité. *S est P* devient *P est S* ; ou plus exactement (Quantificateur) *S*-(Copule)-*P* devient (Quantificateur) *P*-(Copule)-*S*.

La conversion dite *simple* n'est valide que si l'extension (universelle ou particulière) des termes (sujet et prédicat) demeure inchangée, autrement dit si, par exemple, un sujet pris universellement dans la proposition de départ est pris universellement dans la proposition convertie et qu'un prédicat pris universellement reste lui aussi pris universellement.

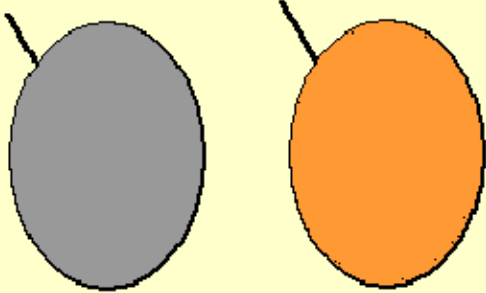
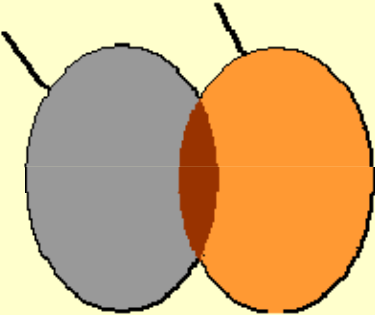
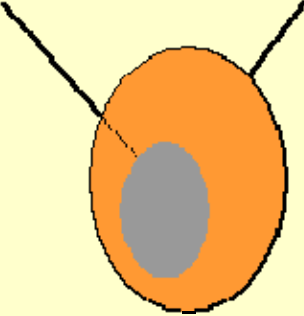
La quantité de la proposition détermine l'extension du sujet. Dans une proposition universelle, le sujet est pris universellement, tandis que dans une proposition particulière, le sujet est pris particulièrement. L'extension du prédicat, elle, est déterminée par la qualité (affirmation ou négation) de la proposition. **Dans une proposition affirmative, le prédicat est toujours particulier, dans une proposition négative, le prédicat est toujours universel.**

Les prémisses en **E** et **I** autorisent des conversions simples. Elles donnent respectivement **E** et **I**. *Aucun mammifère n'est ovipare* donne, par conversion simple, *Aucun ovipare n'est mammifère*. *Quelques chimpanzés sont petits* donne *Quelques (choses) petites sont des chimpanzés*.

Il existe une figure de conversion dans laquelle l'extension d'un des termes change, celle qui permet de passer de **A** à **I**. On parle alors de **conversion par accident**. Elle s'opère par limitation, en passant d'une universelle à une particulière, autrement dit en *diminuant* la quantité de la proposition. *Tous les chats sont gris* (A) peut être convertie en *Quelques (choses) grises sont des chats* (I).

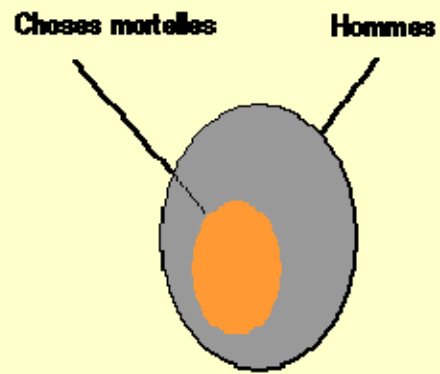
O n'autorise pas la conversion. L'inférence est indécidable parce que **O** est trop *libérale* en ce qui concerne les rapports entre les extensions de *P* et de *S*.

La relation de conversion peut être exposée graphiquement, c'est-à-dire en termes de *classes*.

E : <i>Aucun homme n'est mortel</i> donne par conversion E : <i>Aucune (chose) mortelle n'est homme</i>	Hommes Choses mortelles 
I : <i>Quelques hommes sont mortels</i> donne par conversion I : <i>Quelques (choses) mortelles sont des hommes</i>	Hommes Choses mortelles 
La conversion par limitation de A : <i>Tous les hommes sont mortels</i> donne I : <i>Quelques choses mortelles sont des hommes</i>	Hommes Choses mortelles 

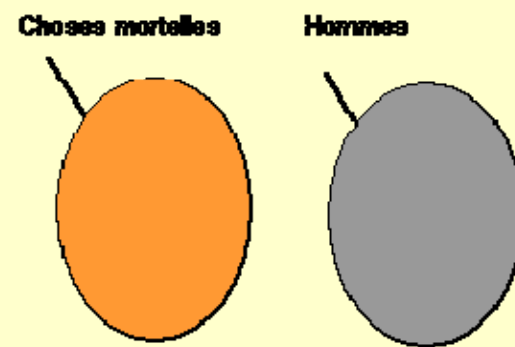
La conversion de **O** : *Quelques hommes ne sont pas mortels* est indéterminée, elle peut correspondre à **A**, **E**, **I** ou **O** :

à **A** : Toutes les choses mortelles
sont des hommes



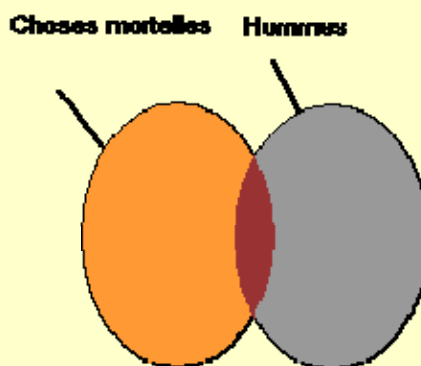
ou à

E : Aucune chose mortelle n'est un
homme



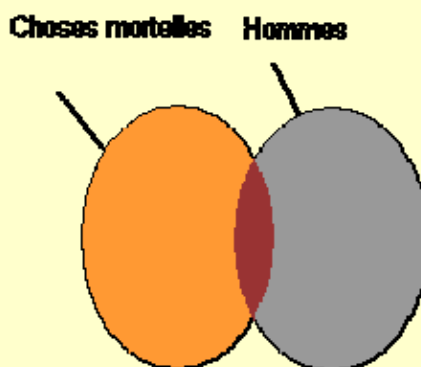
ou à

I : Quelque chose mortelle est un
homme



ou encore à

O : Quelque chose mortelle n'est pas
un homme



2.2. Obversion et contraposition

Outre la conversion, la tradition a développé et nuancé cette théorie de l'inférence en cherchant d'autres formes impliquant des manipulations plus complexes des éléments en jeu : *sujet, prédicat, négation, affirmation, particularité, universalité*. Ces opérations sont l'**obversion** et la **contraposition**.

S	est	P	L'obverse d'une proposition s'obtient en changeant la qualité de celle-ci et en niant le prédicat. Exemple : <i>Tous les hommes sont mortels (A)</i> devient <i>Aucun homme n'est immortel (E)</i> . <i>Quelques chats sont gris (I)</i> devient <i>Quelques chats ne sont pas non gris (O)</i> .
	↓		
S	n'est pas	non-P	

S	est	P	La contraposée d'une proposition s'obtient en inversant le sujet et le prédicat pour les nier ensuite tous deux. Cela donne une proposition contraposée de même qualité, quantité et valeur de vérité. On peut construire des inférences immédiates valides à partir de A et de O par contrapositions simples et à partir de E par contraposition par limitation.
	↓		
non-S	est	non-P	

Exemples de contraposition :

- *Tous les lézards sont verts (A)* devient *Tout ce qui est non vert est non lézard (A)*.
- *Quelques hommes ne sont pas sportifs (O)* donne *Quelques non sportifs ne sont pas non hommes (O)* (ce qui revient à dire : *Il y a certains hommes qui ne sont pas sportifs, mais qui ne sont pas pour autant à exclure la classe des hommes*).

2.3. Remarque

Concrètement, cette théorie de l'inférence immédiate permet de construire de nombreuses propositions vraies et de nombreux raisonnements valides à partir d'une prémisse vraie. Voici par exemple toutes les inférences qu'il est possible de tirer de l'énoncé *Tous les hommes sont mortels* au moyen du carré logique et de la conversion.

- **E** : *Il est faux qu'aucun homme n'est mortel*
- **I** : *Quelques hommes sont mortels*
- **O** : *Il est faux que quelques hommes ne sont pas mortels*
- **I** (conversion par limitation) : *Quelques mortels sont des hommes*

3. Théorie du syllogisme

Nous venons de voir comment construire une série d'inférences immédiates et comment déterminer celles qui sont valides. Aristote, dans son exposé de la syllogistique, examine les

inférences médiatees particulières que sont les syllogismes et tente de déterminer les formes d'inférences valides.

3.1. Le syllogisme

Un syllogisme est la mise en relation logique de deux propositions catégoriques (les prémisses) avec une troisième (la conclusion). Aristote le présente comme suit : « Si **a** est prédiqué de tout **b**, et **b** prédiqué de tout **c**, nécessairement **a** est prédiqué de tout **c**. {...}. » Plus tard, on appellera **a** (le prédicat de la conclusion) le terme majeur, **c** (le sujet de la conclusion) le terme mineur, et **b** le moyen terme (c'est-à-dire le terme apparaissant dans les prémisses et non dans la conclusion).

La prémisses contenant le majeur ou grand terme s'appelle la **majeure**, et celle contenant le mineur ou petit terme, la **mineure**. Ces désignations font référence au point de vue extensionnel déjà signalé chez Aristote. Le grand terme est, dans l'exemple donné, celui qui possède la plus grande extension ; le petit la plus réduite. Le moyen terme a une extension intermédiaire.

Dans l'exemple qui suit, « Grec » est le terme mineur (il y a moins de Grecs que d'hommes ou de mortels), « mortels » est le terme majeur (il y a plus de mortels que d'hommes ou de Grecs) et « hommes » est le moyen terme.

Tous les hommes sont mortels	Tous les b sont a	Majeure
Tous les Grecs sont des hommes	Tous les c sont b	Mineure
Tous les Grecs sont mortels	Tous les c sont a	Conclusion

Cette inférence est valide du seul fait de sa structure formelle. Cette indépendance par rapport au contenu de sens des propositions qu'elle examine indique que la syllogistique annonce le formalisme de la logique contemporaine.

3.2. La syllogistique

La syllogistique est l'étude systématique de toutes les formes de syllogismes possibles, ainsi que l'examen des liaisons existant entre les divers types de syllogismes. Le projet de départ d'Aristote était très ambitieux. Il entendait développer une syllogistique modale dont la syllogistique assertorique n'aurait été qu'une partie. Aristote avait en effet remarqué que l'affirmation prédicative pouvait se faire suivant diverses modalités :

- L'affirmation **assertorique** énonce une proposition catégorique comme **vraie** : *Tous les hommes sont mortels*
- L'affirmation **problématique** énonce une proposition catégorique comme **probablement** vraie : *Il est probable qu'aucun homme ne soit mortel*
- L'affirmation **catégorique** énonce une proposition catégorique comme **nécessairement** vraie : *Nécessairement, tous les hommes sont mortels*

Cette division tripartite permet de nouvelles combinaisons (syllogismes dont une prémisses est problématique et l'autre assertorique...). Si Aristote s'est limité à la syllogistique assertorique,

on peut voir ici une anticipation de ce qui s'est récemment développé sous le nom de **logique modale**.

Les syllogismes assertoriques peuvent être de quatre **figures**, lesquelles présentent chacune soixante-quatre **modes**.

3.2.1 Quatre figures

Tout syllogisme appartient nécessairement à l'une des quatre figures, lesquelles peuvent être distinguées l'une de l'autre par la place qu'y occupe le **moyen terme**.

Figure 1 Le moyen terme est sujet dans la majeure et prédicat dans la mineure.	Tout <u>b</u> est a Tout c est <u>b</u> Tout c est a
Figure 2 Le moyen terme est le prédicat des deux prémisses.	Tout a est <u>b</u> Aucun c n'est <u>b</u> Aucun c n'est a
Figure 3 Le moyen terme est le sujet des deux prémisses.	Tout <u>b</u> est a Tout <u>b</u> est c Quelque c est a
Figure 4 Le moyen terme est le prédicat de la majeure et le sujet de la mineure.	Tout a est <u>b</u> Tout <u>b</u> est c Quelque c est a

3.2.2. Soixante quatre modes par figure

$$\begin{array}{l}
 \text{4}^{\text{places :}} \\
 \text{types de} \\
 \text{propositions :} \\
 \text{A, E, I, O}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \text{3 majeure, mineure ou conclusion} \\
 \text{64 modes} \\
 \text{possibles}
 \end{array}$$

Tout syllogisme est composé de trois propositions. Chacune de ces propositions pouvant appartenir à l'une des quatre catégories de propositions (A, E, I ou O), il en résulte que **chaque figure** présente 64 **modes** syllogistiques. On peut avoir des syllogismes en mode **AAA** ou **AAI** ou **AEO**, etc. Avec cette division en **figures** et en **modes**, Aristote pouvait être certain d'examiner toutes les possibilités de combiner les éléments qu'il avait décrits.

Voici, par exemple, un syllogisme de la première figure, en mode **EIO**.

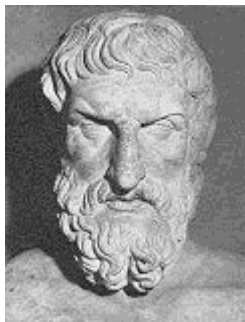
Aucune vulgarisation n'est aisée
Quelques travaux sont des vulgarisations
Quelques travaux ne sont pas aisés

Ce qui intéresse Aristote, c'est de distinguer les formes de syllogismes valides. Pour procéder à une telle distinction, on peut procéder intuitivement, en remarquant, par exemple, que des séries de type **IAA** ou **OOA**, qui tirent des conclusions universelles de prémisses particulières, ne peuvent être valides. Une autre méthode, celle qui fut adoptée par Aristote, est de réduire la validité des syllogismes à la validité de quelques formes syllogistiques que l'on tient pour immédiatement valides en vertu de leur évidence. Ce sont les quatre modes fondamentaux de la première figure. Aristote les appelait les syllogismes parfaits (**AAA**, **EAE**, **AII**, **EIO**). Cette réduction se fait à l'aide de transformations dont la plus importante est la **conversion**.

Certains points de la pensée d'Aristote ont un caractère très moderne. Il pratique un constructivisme formel *a priori* qui épuise toutes les possibilités combinatoires d'un jeu donné d'éléments parmi lesquels il introduit, en outre, la notion de quantification. Il existe chez lui une ébauche d'axiomatisation et une mise en évidence des lois fondamentales de la pensée : les principes d'identité, de la non-contradiction et du tiers exclus.

En vertu du principe du tiers exclu, de deux propositions contradictoires l'une est vraie et l'autre fausse. Selon le principe d'identité, toute proposition est égale à elle-même. Le principe de non-contradiction énonce qu'il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps, au même sujet et sous le même rapport.

B. Les stoïciens et les Mégariques



L'école de Mégare fut fondée par Euclide de Mégare (450-380). Elle s'inscrit dans la tradition sophistique, opposée à l'école Aristotélicienne. Les Mégariques ont été les premiers à souligner l'importance de paradoxes logiques qui semblent remettre en question certaines notions fondamentales de la logique, telle la notion de vérité. Euboulide de Milet a, par exemple, énoncé le paradoxe du **menteur** qui demande à son interlocuteur de fixer la valeur de vérité de l'énoncé *Je mens* (plus précisément : *Ce que je dis est faux*). Si il est vrai que je mens, la valeur de vérité de cet énoncé est faux. S'il est faux que je mens, alors je dis vrai. Ce problème traditionnel des logiciens a refait surface au début du XXe siècle. Bertrand Russell, notamment, a élaboré sa théorie des types pour tenter de résoudre ce genre de paradoxes.

Un philosophe stoïcien, Chrysippe, jouissait, semble-t-il, d'une grande réputation dans l'antiquité. Si la tradition a négligé ses découvertes pour leur préférer la syllogistique, le XXe siècle a redécouvert la modernité de la logique stoïcienne. C'est une logique des propositions, c'est-à-dire une logique qui analyse les raisonnements sans entrer dans la structure interne de leurs propositions. La logique d'Aristote est, elle, une logique des termes, des classes ou des prédicats. Elle est donc moins élémentaire qu'une logique des propositions. La logique

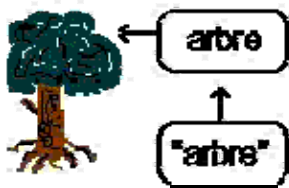
stoïcienne était, par ailleurs, axiomatisée et, parmi ses axiomes, certains ont fait l'objet d'un réexamen par les logiciens contemporains.

L'un de ces «indémontrables» stoïciens est le *modus ponens* : **Si le premier, alors le second. Or le premier. Donc le second** . Les expressions «le premier» et le «le second» sont en fait des variables représentant n'importe quelles propositions. On ne se préoccupe de la structure interne d'aucune d'entre elles, mais on décompose la prémisse de forme «si...alors...» qui est une proposition complexe, ou composée, en deux propositions plus simples.

C. La fin de l'Antiquité et le Moyen Âge

A la fin du II^{ème} siècle, on entre dans une période de stagnation d'où émergent cependant de grands commentateurs tels que Galien (II^{ème} siècle), Porphyre (fin III^{ème} siècle), Alexandre d'Aphrodise (II^e et III^e siècles P.C.), Simplicius (V^e et VI^e siècles) et enfin Boèce qui coule dans sa forme traditionnelle la théorie de l'inférence immédiate et la syllogistique aristotéliciennes.

1. Le renouveau : du VIII^e au XIV^e siècles



C'est depuis cette période dite *scolastique* (littéralement : *de l'école*) que l'on dispose de la quasi totalité de la logique d'Aristote. Les scolastiques se sont interrogés sur le statut et la signification des **termes** du langage. Sur le plan de la signification, la distinction entre la **mention** ("*arbre*" possède cinq lettres) et l'**usage** (*tout arbre possède des feuilles*) d'un terme est établie. A travers la querelles des universaux, la logique scolastique tente de déterminer le statut des termes généraux .

Trois camps s'affrontent : les **réalistes**, les **nominalistes** et les **conceptualistes**. Pour les réalistes, les universaux existent en soi et les choses particulières n'existent que par subordination à cette essence qui leur est commune. Le nominalisme a pour champion Guillaume d'Occam (1280-1347) et son fameux principe du rasoir selon lequel il ne faut pas multiplier les entités au delà de ce qui est nécessaire. Occam soutient que seules les choses particulières ont une existence réelle et que les universaux ne sont que des conventions commodes adoptées par le genre humain. Quant à la troisième position, le conceptualisme d'Abélard (1079-1142), elle était intermédiaire bien qu'assez proche du nominalisme.

2. Renaissance et Modernité : du XV^e au XIX^e siècles

On assiste, au cours de cette période, à un déclin relatif de la logique dans la mesure où aucune innovation importante ne voit le jour. Pour la première fois dans l'histoire, cependant, la recherche logique est formulée en langue vulgaire dans des ouvrages comme la logique de Port-Royal : *La logique ou l'art de penser* d'Arnauld et Nicole (1662). En outre cette époque compte certaines personnalités de premier plan.

En 1666, Leibniz donne une *Dissertatio de arte combinatoria*, dans laquelle il formule un projet anticipant celui de la logique symbolique contemporaine. Les grandes lignes de ce projet sont de fonder une notation universelle et artificielle des idées simples en les symbolisant, et d'établir ensuite des techniques automatisables afin de combiner ces symboles

simples ou atomiques. Bref, le projet de Leibniz est de remplacer la pensée et l'intuition par un calcul sur des signes qui serait plus sûr et plus rapide.

Euler (1707-1783) est le premier à tenter de représenter les relations syllogistiques par des diagrammes.

J. Stuart Mill (1806-1873) est le grand promoteur de l'induction (procédé consistant à tirer d'observations particulières des vérités universelles). A ses yeux, ce procédé est plus originaire que la déduction qui le présuppose toujours. C'est dans son ouvrage *A system of logic*, qu'il présentera sa logique inductive.

De manière générale pourtant, les grands philosophes de l'époque, Descartes (1596-1650), Kant (1724-1804), Hegel (1770-1831) notamment, étaient des adversaires de la logique formelle ou estimaient que la logique était une science qui était sortie achevée de la plume d'Aristote.

La logique pour les nuls

Chapitre II. Logique contemporaine classique

A. Logique des classes

1. Calcul booléen



George Boole
(1815-1864)

En 1847 paraissaient deux ouvrages d'une importance capitale, *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning* de George Boole et *Formal logic* de De Morgan. Le nom de De Morgan est surtout resté pour sa formulation de deux lois importantes en logique des propositions. L'apport le plus important est sans conteste celui de Boole. Ce dernier traite la logique d'Aristote comme une algèbre. Ce qui, dans la logique traditionnelle apparaît comme une inférence faisant usage d'un minimum de mots est effectué, chez Boole, comme un calcul sur des signes algébriques dont l'interprétation la plus naturelle est qu'ils symbolisent des classes ou des opérations sur les classes.

Les éléments utilisés dans le calcul booléen sont les suivants : des variables ($a, b, c, \dots$), deux constantes (1 et 0), et quatre opérateurs de base (+, -, ., =). a, b et c représentent des classes quelconques, 1 est la classe universelle, 0 est la classe vide. Sur le plan des opérations, $a+b$ exprime l'union de deux classes, $a.b$ exprime l'intersection de deux classes, $-b$ désigne la classe complémentaire de b et $a=b$ exprime l'identité de deux classes.

Boole nous donne ensuite un certain nombre d'axiomes pour ces opérateurs. Par exemple :

$a.b = b.a$ est la propriété de commutativité de l'opérateur « $\cdot$ ».

$a+b = b+a$ est la propriété de commutativité de l'opérateur « $+$ ».

$a.(b.c) = (a.b).c$ est la propriété d'associativité de l'opérateur « $\cdot$ ».

$a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$ est la loi de distribution de « $\cdot$ » par rapport à « $+$ ».

$a.a = a^2 = a$. Cet axiome énonce que la spécification d'une classe par elle-même reproduit cette classe.

$a.-a = 0$ Cet axiome formule le principe de non-contradiction.

Il est clair que lorsqu'un certain nombre d'axiomes semblables sont donnés, il devient possible de travailler à l'aide d'un calcul abstrait. On peut opérer des transformations d'équations sans se soucier de ce que représentent a, b ou c . Notons en outre qu'il est possible de représenter les syllogismes aristotéliens dans la notation algébrique de Boole. La proposition *Tout b est a* se transcrit $b.a = b$. Il est équivalent de dire de tout élément de la classe b qu'il est aussi un élément de a ou de dire que b est l'intersection de la classe a avec la classe b elle-même.

Tout b est a	$b.a = b$
Tout c est b	$c.b = c$
Tout c est a	$c.a = c$

La validité de cette forme syllogistique peut être démontrée dans la logique des classes. On

part des prémisses suivantes $\mathbf{b.a = b}$ et $\mathbf{c.b = c}$. De là on peut conclure que $\mathbf{c.(b.a) = c}$, en remplaçant $\mathbf{b}$ dans la mineure par sa valeur donnée dans la majeure. De $\mathbf{c.(b.a) = c}$ on peut déduire que $\mathbf{(c.b).a = c}$ en utilisant l'associativité. On a donc $\mathbf{c.a = c}$, en remplaçant $\mathbf{c.b}$ par $\mathbf{c}$.

Si l'algèbre de Boole était novatrice, elle n'en comportait pas moins de nombreux défauts. Elle fut reprise et perfectionnée par W. S. Jevons (1835-1882). Une synthèse de l'algèbre de la logique a été présentée par Schröder à la fin du siècle, et E. V. Huntington en a présenté une axiomatisation au début du XXe siècle.

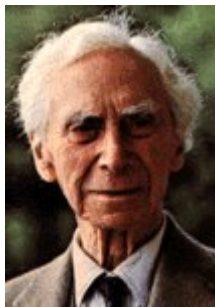
Un **antilogisme** est une suite de trois énoncés qui, pris ensemble, est inconsistante. Christine Ladd-Franklin (1847-1930), qui introduisit cette notion, utilisa le fait qu'un syllogisme est valide si et seulement si la suite formée de ses prémisses et de la négation (ou contradictoire) de sa conclusion est un antilogisme pour mettre en évidence un principe unique dont découlent immédiatement les formes valides.

2. Paradoxes et Théorie des types

2.1. Paradoxes

Dès l'antiquité, certains logiciens avaient constaté la présence de nombreux paradoxes au sein de la rationalité. En fait, on peut dire que malgré leur nombre, ces paradoxes ne sont que les illustrations d'un petit nombre de structures paradoxales. Nous nous intéresserons ici à une structure présente dans les paradoxes mégariques, du type «le menteur».

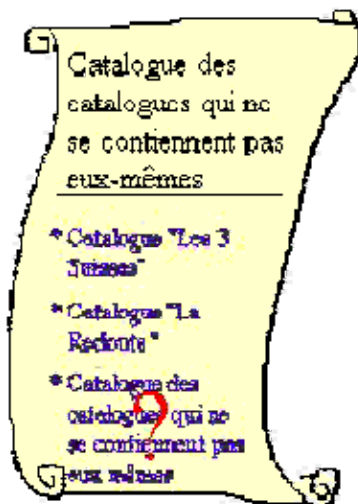
2.1.1. Le paradoxe de la classe des classes (Russell)



**Bertrand
Russell**
(1872-1970)

Il existe deux types de classes : celles qui se contiennent elles-mêmes (ou classes **réflexives** : la classe des ensembles non-vides, la classe des classes,...) et celles qui ne se contiennent pas elles-mêmes (ou classes **irréflexives** : la classe des travaux à rendre, la classe des oranges sanguines, ...). La question posée est la suivante : la classe des classes irréflexives est-elle elle-même réflexive ou irréflexive? Si elle est réflexive, elle se contient et se trouve rangée dans la classe des classes irréflexives qu'elle constitue, ce qui est contradictoire. Si elle est irréflexive, elle doit figurer dans la classe des classes irréflexives qu'elle constitue et devient ipso facto réflexive, nous sommes face à une nouvelle contradiction.

2.1.2. Le paradoxe du bibliothécaire (Gonseth)



Dans une bibliothèque, il existe deux types de catalogues. Ceux qui se mentionnent eux-mêmes et ceux qui ne se mentionnent pas. Un bibliothécaire doit dresser le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes. Arrivé au terme de son travail, notre bibliothécaire se demande s'il convient ou non de mentionner le catalogue qu'il est précisément en train de rédiger. A ce moment, il est frappé de perplexité. Si ne le mentionne pas, ce catalogue sera un **catalogue qui ne se mentionne pas** et qui devra dès lors figurer dans la liste des catalogues ne se mentionnant pas eux-mêmes. D'un autre côté, s'il le mentionne, ce catalogue deviendra un **catalogue qui se mentionne** et qui ne doit donc pas figurer dans ce catalogue, puisque celui-ci est le catalogue des catalogues qui ne se mentionnent pas.

Le paradoxe du webmestre. Les catalogues peuvent être remplacés par des pages Web et la relation «mentionner» par la relation «renvoyer» comme dans [cette page](#).

2.1.3. Le paradoxe du menteur (variante)

Définissons provisoirement le mensonge comme l'action de formuler une proposition fausse. Le poète crétois Epiménide affirme : «Tous les Crétois sont des menteurs», soit la proposition p. Comment décider de la valeur de vérité de p ? Si p est vraie, comme Epiménide est Crétois, p doit être fausse. Il faut donc que p soit fausse pour pouvoir être vraie, ce qui est contradictoire. p est donc fausse. Remarquons qu'on ne peut pas en déduire, comme dans le véritable paradoxe du menteur, que p doit aussi être vraie.

2.2. La théorie des types de Russell



Selon Russell, les paradoxes qui viennent d'être mentionnés prennent leur source dans un usage autoréférentiel du discours. Le paradoxe du menteur, par exemple, aboutit à une contradiction du fait que l'énoncé "je mens" ou "les crétois mentent" figure lui-même parmi les énoncés qu'il décrit comme mensongers. Pour sortir de la contradiction, il convient, pour Russell, de distinguer des niveaux de langage (ou "types"), de manière à interdire un usage autoréférentiel du discours. Ainsi, on dira que l'énoncé "je mens" est un énoncé de niveau 1 qui décrit des énoncés de niveau 0 pour lesquels il constitue un métaénoncé. Les énoncés de niveau 1 ne faisant pas partie des énoncés décrits par les énoncés de niveau 1, l'énoncé "je mens" ne pourra pas se prendre lui-même pour objet, à moins de procéder à une erreur de détermination de type d'énoncé.

B. Calcul propositionnel et calcul des prédicats



Gottlob Frege
(1848-1925)

Gottlob Frege est considéré comme le père fondateur de la logique contemporaine. Ses ouvrages majeurs sont *L'Idéographie* (*Begriffsschrift*, 1879) et les *Fondements de l'arithmétique* (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884).

1. Le calcul propositionnel ou théorie des fonctions de vérité

1.1. Introduction

L'expression *proposition* désigne un énoncé du langage ordinaire mais considéré du point de vue formel qui est celui de la logique. En clair, cela signifie que l'on traite seulement d'un certain type d'énoncés et que l'on néglige dans ce type d'énoncés une série de paramètres qui seront sans incidence logique.

Les propositions envisagées ici sont ce qu'on appelle des *fonctions de vérité*. Ce sont des énoncés descriptifs d'un état de fait et susceptibles d'être vrais ou faux. S'il y a adéquation entre la proposition et le fait décrit, la proposition est vraie, s'il n'y a pas adéquation, la proposition est fausse. Ainsi l'énoncé *Le chat du voisin est mort* sera vrai si le chat du voisin est mort au moment où on l'énonce.

Le chat du voisin est mort



Les fonctions de vérité ou *propositions* que nous considérons ici peuvent être simples ou complexes.

Le chat du voisin est mort est une proposition atomique. Il n'est pas possible de l'analyser en des propositions plus simples.

Jean consulte ses sources, en fait une synthèse et passe à la phase d'écriture est en revanche une proposition complexe composée des propositions suivantes : *Jean consulte ses sources*, *Jean fait une synthèse de ses sources*, *Jean passe à la phase d'écriture*.

La logique propositionnelle ou calcul des propositions s'intéresse aux relations entre propositions et aux opérations sur ces dernières sans analyser la composition non propositionnelle des propositions simples. Le calcul propositionnel est donc un calcul interpropositionnel dans la mesure où il ne s'occupe que des fonctions de vérité et est soumis à la thèse d'extensionnalité selon laquelle la valeur de vérité de toute proposition composée dépend uniquement de la valeur de vérité des propositions composantes et est donc formellement déterminable sans ambiguïté.

1.2 La formalisation du langage naturel.

La première étape du calcul propositionnel est la formalisation des énoncés du langage naturel. Pour réaliser ce travail, le calcul propositionnel fournit trois outils : les **variables** propositionnelles, les constantes ou **opérateurs logiques** et les signes de **ponctuation**.

1. Les **variables** propositionnelles ($p, q, r, \dots$) symbolisent des propositions simples quelconques. Si la même variable apparaît plusieurs fois, elle symbolise chaque fois la même proposition.
2. Les cinq **constantes** ou opérateurs logiques : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ et $\leftrightarrow$.
3. Les signes de ponctuation se réduisent aux seules **parenthèses** ouvrante et fermante qui organisent la lecture de manière à éviter toute ambiguïté. Dans l'expression $(\neg p \vee q)$ c'est seulement la proposition p qui est niée, mais dans l'expression $\neg(p \vee q)$, c'est la disjonction qui est niée et non la seule proposition p .

	Nom	Description	Symbole	Utilisation
1	Négation	La négation est un opérateur qui ne porte que sur une proposition, il est unaire ou monadique. <i>Il ne pleut pas</i> s'écrit $\neg p$. Cet énoncé est vrai si et seulement si p est faux (dans ce cas s'il est faux qu'il pleut). L'usage classique de la négation est caractérisé par la loi de double négation : $\neg \neg p$ est équivalent à p .	$\neg$	$\neg p$
2	Conjonction	La conjonction ou produit logique est un opérateur binaire, elle met en relation deux propositions. <i>Tout homme est mortel ET Ma voiture perd de l'huile</i> s'écrit $(p \wedge q)$. $(p \wedge q)$ est vrai si et seulement si p est vrai et q est vrai.	$\wedge$	$(p \wedge q)$
3	Disjonction	La disjonction ou somme logique est, elle aussi, un opérateur binaire. $(p \vee q)$ est vrai si et seulement si p est vrai ou q est vrai. On peut comprendre ce <i>ou</i> de deux façons : soit de manière inclusive, soit de manière exclusive. Dans le premier cas $(p \vee q)$ est vrai si p est vrai, si q est vrai ou si p et q sont tous deux vrais. Dans le second cas, $(p \vee q)$ est vrai si p est vrai ou si q est vrai mais pas si les deux le sont. La disjonction du calcul propositionnel est le ou inclusif et on donne au <i>ou</i> exclusif le nom d'alternative.	$\vee$	$(p \vee q)$
4	Implication	L' implication est également un opérateur binaire. Elle correspond, EN GROS, au schéma linguistique <i>Si...alors...</i> . <i>Si j'ai le temps, j'irai au cinéma</i> s'écrit $(p \rightarrow q)$. $(p \rightarrow q)$ est faux si p est vrai et q est faux. Si le conséquent (ici q) est vrai, l'implication $(p \rightarrow q)$ est vraie. Lorsque l'antécédent (ici p) est faux, l'implication est toujours vraie. Cette dernière	$\rightarrow$	$(p \rightarrow q)$

		remarque peut être comprise si l'on se réfère à des énoncés de type : <i>Si on pouvait mettre Paris en bouteille, on utiliserait la tour Eiffel comme bouchon.</i> En résumé, une implication est fausse si et seulement si son antécédent est vrai et son conséquent est faux.		
5	Bi-implication	La bi-implication est, elle aussi, binaire : elle symbolise les expressions ... <i>si et seulement si...</i> et ... <i>est équivalent à...</i> L'équivalence entre deux propositions est vraie si celles-ci ont la même valeur de vérité. La bi-implication exprime donc aussi une forme d'identité et c'est pourquoi elle est souvent utilisée dans les définitions.	$\leftrightarrow$	$(p \leftrightarrow q)$

Il est possible d'établir des équivalences entre ces opérateurs. Nous avons déjà vu comment le biconditionnel pouvait se définir comme un produit de conditionnels réciproques, voyons maintenant d'autres équivalences.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$$

Sont à noter également les deux lois de De Morgan :

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

Elles permettent de transformer la disjonction en conjonction et vice-versa :

$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

La logique pour les nuls

1.3. Procédures de décision et tests de validité

Le calcul propositionnel autorise des procédures de décision ou tests. Ceux-ci permettent de déterminer dans quels cas une expression est vraie et en particulier si elle est toujours vraie. Une expression toujours vraie quel que soit le contenu linguistique des variables qui la composent est appelée une expression **valide**, une **tautologie** ou encore une **loi** (de la) logique propositionnelle.

Exemple : $(p \rightarrow (p \vee q))$ est une proposition valide. Elle est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité attribuées aux propositions p et q qui la composent.

Il existe deux manières d'établir qu'une proposition est une loi de la logique propositionnelle. On peut soit (1) employer des procédures non axiomatisées, soit (2) recourir à des procédures axiomatiques et démonstratives.

1.3.1. Les procédures de décision non axiomatisées



**Ludwig
Wittgenstein
(1889-1951)**

Plusieurs de ces méthodes existent mais nous nous limiterons ici à la plus simple et à la plus parlante d'entre elles, celle du **calcul matriciel**, parfois appelée **méthode des tables de vérité**. Elle fut inventée par l'une des grandes figures philosophiques de ce siècle, l'autrichien Ludwig Wittgenstein, et techniquement mise au point par le logicien polonais Jan Lukasiewicz dans les années 20.

La valeur de vérité d'une expression complexe est fonction de la valeur de vérité des énoncés plus simples qui la composent, et finalement fonction de la valeur de vérité des variables propositionnelles qui la composent. En envisageant toutes les combinaisons possibles des valeurs de vérité des variables propositionnelles, nous pouvons déterminer les valeurs de vérité de l'expression complexe.

Le calcul matriciel nous permet de décider, à propos de toute proposition, si celle-ci est une tautologie (toujours vraie), une contradiction (toujours fausse) ou une expression contingente (parfois vraie, parfois fausse). On peut ainsi distinguer quatre façons de combiner les variables propositionnelles, les parenthèses et les signes logiques :

	Nom	Description	Exemple
1	Enoncé mal formé	Non-sens. Ni vrai, ni faux.	$(\forall p) q$
2	Tautologie	Enoncé toujours vrai	$(p \vee \neg p)$
3	Contradiction	Enoncé toujours faux	$(p \wedge \neg p)$
4	Enoncé contingent	Enoncé parfois vrai, parfois faux	$(p \vee q)$

La méthode des tables de vérité permet de déterminer le type d'expression bien formée face auquel nous nous trouvons. Elle n'exige en principe aucune invention, c'est une procédure mécanique. Les procédures axiomatisées, en revanche, ne sont pas entièrement mécaniques. Inventer une démonstration dans le cadre d'un système axiomatisé demande parfois de l'habileté, de l'habitude ou de la chance. Pour ce qui est des tables de vérité, voici la marche à suivre.

Nombre de rangées d'une table de vérité

$$2^n \text{ variables} \\ \text{valeurs de vérité}$$

Lorsqu'on se trouve face à une expression bien formée, ou fonction de vérité, on commence par déterminer à combien de variables propositionnelles distinctes on a affaire. Ensuite on examine les différents arguments qui constituent cette expression. On construit alors un tableau comprenant 2^n **rangées** (n = le nombre de variables) et un nombre de **colonnes** égal au nombre d'arguments plus des colonnes pour l'expression elle-même et ses autres composantes. On attribue alors aux variables les différentes combinaisons de vérité et de fausseté qui peuvent leur être conférées (la vérité est exprimée dans la table par un 1 et la fausseté par un 0). Chacune des rangées correspond à un **monde possible** et la totalité des rangées constitue l'ensemble des mondes possibles. Il existe, par exemple, un monde possible dans lequel p est une proposition vraie tandis que q est fausse.

Voyons quelques exemples.

Soit la proposition correspondant au *Modus ponens*, le premier indémontrable stoïcien : *Si le premier alors le second et si le premier, alors le second*. On peut la formaliser comme suit : $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$. Nous avons ici deux variables, p et q . Notre tableau comptera dès lors 2^2 rangées, c'est-à-dire 4. Il contiendra 2 colonnes représentant respectivement les différentes valeurs de p et q et 1 colonne pour chacune de ses parties qui sont $(p \rightarrow q)$ et $((p \rightarrow q) \wedge p)$, plus 1 colonne pour la forme globale, soit 5 colonnes au total. Il ne reste plus qu'à attribuer à p et q toutes les combinaisons possibles de vérité et de fausseté et à calculer la valeur de vérité de la forme globale en utilisant les règles données plus haut pour chaque opérateur.

	1	2	3	4	5
	p	q	$(p \rightarrow q)$	$((p \rightarrow q) \wedge p)$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1
3	0	1	1	0	1
4	0	0	1	0	1

Nous sommes ici face à une tautologie/à une loi de la logique propositionnelle puisque notre fonction de vérité (colonne 5) est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité attribuées à ses variables (colonnes 1 et 2).

L'expression $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$, quant à elle, est la négation d'une tautologie, c'est-à-dire une contradiction. On peut le vérifier à l'aide d'une nouvelle table de vérité, qui prolonge la précédente.

	1	2	3	4	5	6
	p	q	$(p \rightarrow q)$	$((p \rightarrow q) \wedge p)$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$	$\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
1	1	1	1	1	1	0
2	1	0	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1	0

Soit l'expression $((\neg p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$. Voici sa table de vérité.

	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \rightarrow q)$	$((\neg p \rightarrow q) \wedge p)$	$((\neg p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$
1	1	1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	1	0	1
4	0	0	1	1	0	0	1

Nous sommes ici face à une expression contingente. Elle correspond à un schéma inférentiel non valide puisque, comme le montre la première rangée de notre table, il est possible que cette expression ait un antécédent vrai $((\neg p \rightarrow q) \wedge p)$ et un conséquent faux $\neg q$; le raisonnement

$$((\neg p \rightarrow q), p). \text{ Donc } \neg q$$

peut dès lors avoir des prémisses vraies et une conclusion fausse.

1.3.2. Les procédures axiomatiques

L'axiomatisation d'une théorie implique, outre la formalisation de celle-ci, qu'on parte d'un nombre fini d'expressions (les axiomes) et que, grâce à la transformation réglée de ces derniers, on puisse obtenir tous les théorèmes de cette théorie. On part donc de quelques axiomes dont la vérité est posée (et non démontrée). On détermine des règles de déduction permettant de manipuler les axiomes ou toute expression obtenue à partir de ceux-ci. L'enchaînement de ces déductions est une démonstration qui conduit à un théorème, à une loi.

Nous pouvons parcourir rapidement l'axiomatisation de la logique propositionnelle, réduite à deux connecteurs, proposée par Lukasiewicz en 1930.

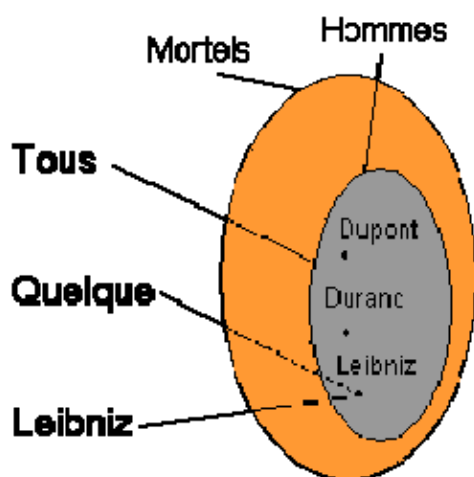
1	Signes primitifs
---	------------------

	- Variables propositionnelles : $p, q, r, \dots$ - Opérateurs : $\neg$ et $\rightarrow$ - Ponctuation : parenthèses : $()$ et $($ Remarquons que les autres opérateurs classiques $\wedge, \vee$ et $\leftrightarrow$ peuvent être définis à l'aide de $\neg$ et $\rightarrow$ grâce aux lois d'équivalence entre opérateurs formulées plus haut.												
2	Règles de formation des expressions bien formées (ebf) : - Toute variable est une ebf. - Si p est une ebf, alors $\neg p$ est une ebf. - Si p et q sont des ebf, alors $(p \rightarrow q)$ est une ebf.												
3	Les axiomes : $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$												
4	Les règles de déduction : - La règle de substitution (S) selon laquelle on peut remplacer dans une expression valide une variable par une ebf et produire ainsi une nouvelle expression valide, à condition d'opérer ce remplacement pour chaque occurrence de la variable considérée. - La règle du détachement ou <i>Modus ponens (MP)</i> selon laquelle si on a obtenu p et $(p \rightarrow q)$, alors on peut obtenir q.												
5	Une démonstration est une liste finie d'ebf telle que chaque ligne de la liste est un axiome ou résulte d'une ou deux lignes qui précèdent par l'application des règles de déduction. La dernière ligne de la démonstration est un théorème. Exemple : une <i>démonstration</i> en 5 lignes du <i>théorème</i> $(p \rightarrow p)$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>Démonstration</th><th>Justification</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1 $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$</td><td>Axiome 1</td></tr> <tr> <td>2 $(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p))$</td><td>S sur l'axiome 1 avec $(q \rightarrow p)$ substitué à q</td></tr> <tr> <td>3 $((p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)))$</td><td>S sur l'axiome 2 avec $(q \rightarrow p)$ substitué à q et p substitué à r</td></tr> <tr> <td>4 $((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$</td><td>MP sur la ligne 3 et la ligne 2</td></tr> <tr> <td>5 $(p \rightarrow p)$</td><td>MP sur la ligne 4 et la ligne 1</td></tr> </tbody> </table>	Démonstration	Justification	1 $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$	Axiome 1	2 $(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p))$	S sur l'axiome 1 avec $(q \rightarrow p)$ substitué à q	3 $((p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)))$	S sur l'axiome 2 avec $(q \rightarrow p)$ substitué à q et p substitué à r	4 $((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	MP sur la ligne 3 et la ligne 2	5 $(p \rightarrow p)$	MP sur la ligne 4 et la ligne 1
Démonstration	Justification												
1 $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$	Axiome 1												
2 $(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p))$	S sur l'axiome 1 avec $(q \rightarrow p)$ substitué à q												
3 $((p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)))$	S sur l'axiome 2 avec $(q \rightarrow p)$ substitué à q et p substitué à r												
4 $((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	MP sur la ligne 3 et la ligne 2												
5 $(p \rightarrow p)$	MP sur la ligne 4 et la ligne 1												

Cette axiomatisation permet de retrouver comme théorème toutes les tautologies ou lois de la logique propositionnelle.

2. La logique des prédicats ou logique des propositions analysées

2.1. Introduction



Cette partie de la logique contemporaine comble certaines lacunes du calcul propositionnel. Celui-ci ne dispose d'aucun moyen pour distinguer les structures des propositions suivantes :

- *Tous les hommes sont mortels*
- *Quelque homme est mortel*
- *Leibniz est mortel*

Pour le calcul propositionnel, ce sont là trois propositions simples symbolisables par les variables p , q , r . Or, cette non-différenciation pose problème car les différences existant entre ces trois propositions sont pertinentes du point de vue logique.

La théorie de l'inférence immédiate et la syllogistique reposent en partie sur l'exploitation de ces différences. La logique des prédicats se présente comme un élargissement du calcul propositionnel. Toutes les tautologies de la logique propositionnelle restent valides au plan de la logique des prédicats et peuvent être traduites dans le formalisme de cette dernière.

2.2. Notation spécifique

$f(x)$ x est f

$(\forall x) f(x)$ Tous les x sont f

$(\exists x) f(x)$ Il existe un x qui est f

Le calcul des propositions traduit toute proposition par une lettre minuscule, par exemple p . La logique des prédicats recourt, elle aussi, à ce formalisme, mais elle y ajoute la notion de quantification à l'aide de fonctions propositionnelles ou **formules** du type $f(x)$ notée aussi fx .

Une fonction propositionnelle simple ou **atomique** est composée d'une variable d'objet x et d'une variable de prédicat f . f marque la place d'un prédicat quelconque et x celle d'un nom satisfaisant ou non le prédicat (on verra plus loin qu'il existe encore d'autres espèces de formules atomiques). Ainsi nous pouvons traduire l'expression *x est mortel* à l'aide de $f(x)$.

Les formules complexes s'obtiennent en combinant des formules atomiques avec des connecteurs propositionnels et des quantificateurs : $(\forall x)$, $(\exists x)$.

$f(x)$ est une fonction propositionnelle qui n'est en elle-même ni vraie ni fausse. Elle acquerra une valeur de vérité lorsqu'elle deviendra une **expression propositionnelle**. Pour qu'une formule devienne une expression propositionnelle, il existe deux moyens.

- La première solution consiste à substituer à x le **nom** d'un objet associé à la définition de la fonction f (nous pouvons traduire la proposition *Socrate est mortel* à l'aide de $f(s)$ où *Socrate* remplace s).
- La seconde solution est d'utiliser un procédé de **quantification**. Par ce procédé, on indique soit :
 - qu'il est possible de substituer à la variable d'objet tous les éléments du domaine associé à la fonction. On écrit alors $(\forall x) jx$ qui se lit *Pour tout x , x est j* .
 - qu'il est possible de substituer au moins un (quelque) élément du domaine considéré. On écrit alors $(\exists x) jx$ qui se lit *Il existe un x tel que x est j* .

Il existe des équivalences permettant de remplacer un quantificateur par l'autre :

$$(\forall x) jx \Leftrightarrow \neg(\exists x) \neg jx$$

$$(\exists x) jx \Leftrightarrow \neg(\forall x) \neg jx$$

A l'aide du nouvel outil qu'est le calcul des prédicats, nous pouvons maintenant formaliser les quatre types d'énoncés catégoriques utilisés par Aristote.

A	<i>Tout homme est mortel</i>	$(\forall x) (ax \rightarrow bx)$	a = homme b = mortel
E	<i>Aucun homme n'est mortel</i>	$(\forall x) (ax \rightarrow \neg bx)$	
I	<i>Quelque homme est mortel</i>	$(\exists x) (ax \wedge bx)$	
O	<i>Quelque homme n'est pas mortel</i>	$(\exists x) (ax \wedge \neg bx)$	

2.3. Les prédicats monadiques et polyadiques

$(\forall x) (Lx \rightarrow (\exists y) (cy \wedge pxy))$
 Tout **Lutin** porte un **chapeau**
 Pour tout x , si x est un **Lutin**, alors il existe un y tel que y est un **chapeau** et x porte y

Jusqu'à présent, nous nous sommes penchés sur des propositions dans lesquelles le prédicat était **monadique**. Cela signifie que ce prédicat jouait le rôle d'attribut d'un ou de plusieurs termes : *Les hommes sont des mammifères* ou *Les hommes et les singes sont des mammifères*. Mais il existe également des prédicats **polyadiques**, exprimant une **relation** entre plusieurs termes. *Aude et Béatrice sont blondes* signifie que *Aude est blonde et Béatrice est blonde*; en revanche *Aude et Béatrice sont soeurs*, ne signifie pas simplement que *Aude est une soeur et Béatrice est une soeur*, mais équivaut à *Aude est une soeur*

de Béatrice. La logique des prédicats exprime ce type de proposition de la manière suivante : sab. s symbolise ici la relation *être soeur de*, a représente Aude et b représente Béatrice.

Une proposition du type *Tout Lutin porte un chapeau* est formalisée comme ceci : $(\forall x)(Lx \rightarrow (\exists y)(cy \wedge pxy))$. Elle se lit *Pour tout x, si x est un Lutin, alors il existe un y tel que y est un chapeau et x porte y.*

2.4. Axiomatisation de la logique des prédicats

Au plan de la logique des prédicats, il n'existe pas de procédure de décision mécanisée du type des tables de vérité. Il existe, par contre, des procédures de démonstration qui impliquent une axiomatisation de la logique des prédicats.

Voici trois règles que l'on rencontre souvent dans ces systèmes. Les démonstrations se lisent de haut en bas et la barre horizontale signifie que ce qui se trouve en-dessous se déduit de ce qui se trouve au-dessus.

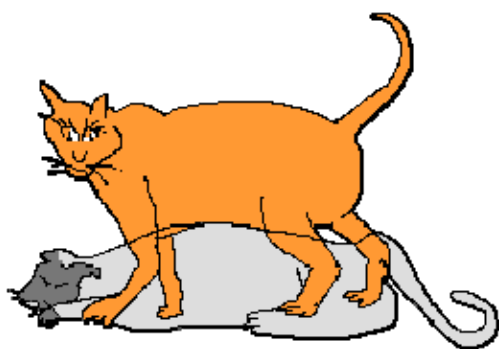
1	La règle de l'instantiation universelle	$\frac{(\forall x) \dots x \dots}{\dots s \dots}$	s est une constante individuelle substituée à x. Si nous savons que $\dots _ \dots$ est vrai pour tout x, nous pouvons conclure qu'il est vrai pour s.
	La règle de la généralisation universelle	$\frac{\dots s \dots}{(\forall x) \dots x \dots}$	De $\dots _ \dots$ est vrai pour s, on conclut que $\dots _ \dots$ est vrai pour tout objet, à condition que s est «quelconque» : cette règle est soumise à la condition de ne pas mentionner s dans les hypothèses.
3	La règle de généralisation existentielle	$\frac{\dots s \dots}{(\exists x) \dots x \dots}$	De $\dots _ \dots$ est vrai pour s, on conclut qu'il existe un x tel que $\dots _ \dots$ est vrai pour x.

Gödel a montré en 1930 qu'on peut, à l'aide d'axiomes et de règles de ce type, déduire toutes les lois de la logique des prédicats.

La logique pour les nuls

Chapitre III. Logiques non classiques : logiques modales et logiques multivalentes

1. Introduction



- Il est mort ^{et} ou il n'est pas mort ?
- Il ^{sera} est peut-être mort ?
- Il n'est ni mort ni pas-mort ?

Les logiques non classiques ont commencé de se développer à partir des années 1920. Le développement des logiques **modales** répond au souci de résoudre les paradoxes de l'implication ($\rightarrow$), notamment le fameux *E falso sequitur quodlibet* (du faux, on peut déduire n'importe quoi) ou $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$. Les logiques modales devaient également permettre le traitement d'énoncés qui ne sont pas vérifonctionnels (soit vrais, soit faux), notamment les énoncés normatifs (*Il faut partir*).

Les logiques **multivalentes** répondent au souci d'attribuer une valeur autre que le vrai ou le faux (l'indéterminé, le probable,...) à certains types d'énoncés, notamment les énoncés relatifs au futur.

Bref, les logiques non classiques se répartissent en deux grandes catégories : les logiques modales caractérisées par l'emploi de certains nouveaux opérateurs, tels que la *Nécessité* et la *Possibilité*, et les logiques multivalentes caractérisées par l'admission de valeurs autres que le vrai ou le faux.

2. Les logiques multivalentes

2.1. La logique trivalente de Lukasiewicz

Cette logique est née de considérations proprement philosophiques qui portaient sur un certain «impérialisme» supposé de la logique contemporaine classique (bivalente). Selon Lukasiewicz, c'est la liberté humaine qui est ici en jeu. Si l'on pense qu'*a priori* tout ce qui est

sensé est vrai ou faux et jamais simplement possible, indéterminé, ou sous déterminé, alors il faut penser que, entre autres, les énoncés concernant le futur sont de tous temps déjà vrais ou faux. Dans son projet de syllogistique modale et dans l'attention portée aux propositions concernant le futur, Aristote avait déjà pris conscience de la contingence de certains événements, de leur dépendance vis-a-vis de la liberté d'action.

La logique trivalente permet la prise en compte et la formalisation d'énoncés du type *Pierre viendra peut-être* en introduisant une tierce valeur : le neutre, le possible,... Autour des années 20, Lukasiewicz propose une axiomatique trivalente dont les théorèmes reprennent ceux de la logique bivalente et en introduisent d'autres. Cette logique trivalente ne reconnaît pas le principe du tiers exclu ($p \vee \neg p$).

2.2. Logique affaiblie ou intuitionniste

Pour comprendre le sens de la démarche de Lukasiewicz, il faut aborder la question des fondements et de la formalisation logique des mathématiques. Durant la première moitié du XXe siècle, une polémique a opposé ceux qui croyaient en l'irréductibilité des mathématiques (Brouwer) et ceux qui pensaient pouvoir en rendre compte à l'aide de la logique formelle (il s'agit du **logicisme** de Russell et de Frege et du **formalisme** de Hilbert). Brouwer et les mathématiciens intuitionnistes estiment qu'il n'est pas légitime d'inférer la vérité d'une proposition de la fausseté de sa négation ($\neg p \rightarrow p$). Il faut, selon eux, admettre que, dans certains cas, un énoncé p demeure indécidé, et ce même si la fausseté de $\neg p$ est établie, aussi longtemps que p n'a pas été démontré positivement. Cette dernière affirmation met en question la validité des preuves par l'absurde qui, pour affirmer une thèse, prouvent que sa négation est fausse.



Kurt Gödel
(1906-1978)

Cette querelle sur l'irréductibilité des mathématiques trouve son origine dans les travaux de Hilbert (1862-1943) qui jugeait essentiel d'exprimer les mathématiques dans le langage formel et axiomatisé de la logique. Il lui fallait, pour cela, commencer par prouver la consistance (la non-contradiction) des mathématiques en montrant qu'il y est impossible de démontrer comme théorèmes à la fois une proposition et sa négation. Selon Hilbert, c'était la seule façon de démontrer que les mathématiques sont fondées. Les travaux de ce type forment ce qu'on appelle la théorie de la démonstration ou métamathématique.

Hilbert a échoué dans sa tentative de démonstration de la non contradiction formelle des mathématiques. Ce sont les travaux de Kurt Gödel (et son fameux **théorème d'incomplétude**) sur les limites internes de la formalisation qui clarifièrent ce que peut et ne peut pas réaliser un système formel axiomatisé.

Une autre invention importante permettant de résoudre les problèmes de fondements des disciplines formelles est le calcul lambda. Celui-ci fut introduit par Church et est également lié à la logique combinatoire de Curry. Le calcul lambda permet l'étude des propriétés générales des fonctions, indépendamment de leur apparition dans quelque domaine particulier. Il existe des liens particuliers entre ce type de discipline et l'informatique théorique. Au cours de leurs recherches sur la fiabilité des programmes, les informaticiens se sont rendu compte que ces programmes, rédigés en un langage formel, étaient des objets mathématiques

dont il convenait de démontrer les propriétés. On a dès lors vu fleurir des systèmes logiques spécialisés (qui sont des extensions de la logique des prédicats).

3. Les logiques modales.

Les logiques modales ont permis de résoudre certains des paradoxes consécutifs à l'utilisation de l'implication ($\rightarrow$). La logique propositionnelle produit des théorèmes dont l'interprétation fait problème. Ainsi $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ est un théorème de la logique propositionnelle que l'on peut traduire comme suit : *S'il existe des barbus alors si le vinaigre est acide, il existe des barbus.* Et nous identifions ici le signe logique ($\rightarrow$) avec la tournure linguistique *Si...alors....* Or dans cet exemple, le premier signe ($\rightarrow$) indique le «passage de la barre» dans un schéma d'inférence, tandis que l'autre symbolise une relation conditionnelle entre deux propositions. Ce sont deux choses différentes que l'on ne peut pas interpréter à l'aide de la même tournure linguistique *Si... alors...*

Vers 1930, C. I. Lewis a tenté de construire un système permettant d'éviter cette ambiguïté. Pour ce faire, il a introduit la notion d'**implication stricte** que l'on peut représenter à l'aide d'un opérateur modal ajouté au conditionnel matériel : $N(p \rightarrow q)$. *Nécessairement, si p alors q.*

Il existe de nombreuses logiques qui s'inspirent de la logique modale. La plus connue est la **logique déontique**. Cette discipline tente de traiter formellement le discours normatif qui exprime des obligations, des permissions,.... Elle se distingue de l'éthique et de la théorie du droit, auxquels elle s'applique, dans la mesure où elle ne fournit aucun contenu aux énoncés normatifs dont elle traite.